

№ 23 (220), вып. 41
Декабрь 2015

НАУЧНЫЙ
РЕЦЕНЗИРУЕМЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в 1995 г.
Журнал входит
в Перечень ведущих рецензируемых
научных журналов и изданий,
выпускаемых в Российской Федерации,
в которых рекомендуется публикация
основных результатов диссертаций на
соискание ученых степеней доктора и
кандидата наук

Учредитель:

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«Белгородский государственный
национальный исследовательский
университет»

Издатель:

НИУ «БелГУ»
Издательский дом «Белгород»
Адрес редакции, издателя, типографии:
308015 г. Белгород, ул. Победы, 85

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе
по надзору в сфере связи,
информационных технологий
и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации средства
массовой информации ПИ № ФС 77-63055
от 10 сентября 2015 г.
Выходит 4 раза в год.

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
ЖУРНАЛА**

Главный редактор

О.Н. Полухин,
ректор НИУ «БелГУ», доктор
политических наук, профессор

Зам. главного редактора

И.С. Константинов,
проректор по научной
и инновационной работе НИУ «БелГУ»,
доктор технических наук, профессор

Научный редактор

В.М. Московкин,
профессор кафедры мировой экономики
НИУ «БелГУ», доктор географических наук

Ответственный секретарь:

О.В. Шевченко,
зам. начальника УНИИ НИУ «БелГУ»,
кандидат исторических наук

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
СЕРИИ ЖУРНАЛА**

Главный редактор серии

А.В. Носков
(доктор физико-математических наук,
профессор НИУ «БелГУ»)

Заместитель главного редактора

Н.В. Малай
(доктор физико-математических наук,
профессор НИУ «БелГУ»)

Ответственный секретарь

Р.А. Загороднюк
(аспирант НИУ БелГУ)

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ

Белгородского государственного университета

Математика. Физика

Belgorod State University
Scientific Bulletin
Mathematics & Physics

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Смешанная задача плоской теории упругости в полуплоскости.
А.П. Солдатов, О.А. Тарасова 5

О численном решении уравнений Вольтерра-Фредгольма с
дробными и частными интегралами. **В.А. Калитвин 9**

Краевые задачи для модифицированного уравнения влаго-
переноса с дробной по времени производной в многомерной
области. **М.А. Керефов, С.Х. Геккиева 17**

О существовании и единственности непрерывных решений
систем линейных уравнений Волтерра с частными интеграл-
лами. **А.С. Калитвин, В.А. Калитвин, Н.И. Трусова 24**

Две задачи для нелинейных интегро-дифференциальных
уравнений Барбашина с дробной частной производной.
А.С. Калитвин, В.А. Калитвин 29

ФИЗИКА

О скорости термофореза твердой умеренно крупноной
сферической аэрозольной частицы с коэффициентом
теплопроводности, зависящим от радиальной координаты.
**Е.Р. Щукин, Н.В. Малай, Э.Л. Шулиманова,
А.А. Стукалов 37**

О термофорезе неоднородных цилиндрических аэрозольных
частиц. **Е.Р. Щукин, Н.В. Малай, Э.Л. Шулиманова 45**

The shift of Energy levels of a quantum dot in single electron
transistor **M. R. Mohebbifar, R. Kh. Gainutdinov,
M. A. Khamadeev 56**

Энергетическое разрешение спектрометра на основе
неохлаждаемого Si планарного детектора и предварительного
усилителя с емкостной и резистивно-емкостной обратной
связью. **А.С. Деев, А.А. Мазиллов, С.В. Наумов,
М.Ю. Шулика 62**

Прыжковая проводимость в монокристаллах $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.4})_3\text{As}_2$.
**В.С. Захвалинский, Т.Б. Никуличева, E. Lähderanta,
М.А. Шахов, Е.А. Пиллук, С.В. Иванчихин 71**

Члены редколлегии:

С.В. Блажевич

(доктор физико-математических наук,
профессор НИУ «БелГУ»)

А.Н. Беляков

(доктор физико-математических наук,
профессор НИУ «БелГУ»)

И.П. Борисовский

(кандидат физико-математических наук,
доцент НИУ «БелГУ»)

А.Г. Брусенцев

(доктор физико-математических наук,
профессор БГТУ им. В.Г. Шухова)

И.Е. Внуков

(доктор физико-математических наук,
профессор НИУ «БелГУ»)

А.В. Глушак

(доктор физико-математических наук,
профессор НИУ «БелГУ»)

Р. Кавалла

(профессор, Технический университет,
Фрайберг, Германия)

В.В. Красильников

(доктор физико-математических наук,
профессор НИУ «БелГУ»)

А.П. Солдатов

(доктор физико-математических наук,
профессор НИУ «БелГУ»)

В.В. Сыщенко

(доктор физико-математических наук,
профессор НИУ «БелГУ»)

Dynamic theory coherent X-ray radiation by beam of relativistic electrons in single-crystal. **S.V. Blazhevich, A.V. Noskov** 79

Dynamic theory X-ray radiation by relativistic electron in composite target. **S.V. Blazhevich, S.N. Nemtsev, A.V. Noskov, R.A. Zagorodnyuk** 95

Функциональные параметры подмагничивающей среды в виде нанокристаллов гексагональных ферритов. **С.В. Блажевич, Л.П. Ольховик, Т.Г. Кузьмичева, Л.В. Фурда, Н.В. Ткаченко, Е.В. Шуринова** 106

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА,
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Математическое моделирование процесса фильтрации жидкостей в пористой среде различной геометрии
О.В. Гальцев, О.А. Гальцева 115

О шифрах, не распространяющих искажений **С.М. Рацеев, В.М. Рацеев** 127

Статьи представлены в авторской редакции.

Оригинал-макет **А.В. Носков,**
В.С. Березова
E-mail: noskov_a@bsu.edu.ru

Подписано в печать 15.12.2015
Формат 60×84/8
Гарнитура Georgia, Impact
Усл. п. л. 17,4.
Заказ 255
Цена свободная
Тираж 1000 экз.
Дата выхода 30.12.2015.

Подписной индекс в Объединённом каталоге
«Пресса России» – 18078

Оригинал-макет подготовлен и тиражирован
в Издательском доме «Белгород»
Адрес: 308015 г. Белгород, ул. Победы, 85

№ 23 (220), Issue 41

December 2015

SCIENTIFIC PEER-REVIEWED
JOURNAL

Founded in 1995

The Journal is included into the list of the leading peer-reviewed journals and publications coming out in the Russian Federation that are recommended for publishing key results of the theses for Doktor and Kandidat degree-seekers.

Founder:

Federal state autonomous educational establishment of higher professional education «Belgorod State National Research University»

Publisher:

Belgorod State National Research University
Belgorod Publishing House

Address of editorial office, publisher, letterpress plant: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor)

Mass media registration certificate ПИ № ФС 77-63055 September 10, 2015 r.

Publication frequency: 4 /year

EDITORIAL BOARD OF JOURNAL

Editor-in-chief

O.N. Poluchin,

Rector of Belgorod State National Research University, Doctor of political sciences, Professor

Deputy editor-in-chief

I.S. Konstantinov,

Vice-Rector on Scientific and Innovative Work of Belgorod State National Research University, Doctor of technical sciences, Professor

Scientific Editor

V.M. Moskovkin,

Professor of World Economy Department of Belgorod State National Research University, Doctor of Geographical Sciences

O.V. Shevchenko,

Deputy Head of Scientific and Innovative Activity Department of Belgorod State National Research University, Candidate of Historical Sciences

**EDITORIAL BOARD
OF JOURNAL SERIES**

Chief editor:

A. V. Noskov,

Professor (Belgorod State National Research University)

Deputies of chief editor:

N.V. Malay,

Professor (Belgorod State National Research University)

Editorial assistant:

R.A. Zagorodnyuk,

graduate student (Belgorod State National Research University)

Belgorod State University
Scientific Bulletin

Mathematics & Physics

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ

**Белгородского
государственного университета**

Математика Физика

CONTENTS

MATHEMATICS

Mixed problem of the theory of elasticity in a half-plane.

A. P. Soldatov, O. A. Tarasova 5

On numerical solution of Volterra-Fredholm equations with fractional and partial integrals ***V.A. Kalitvin 9***

Boundary problem for the modified equation moisture with fractional time derivative in multidimensional domains.

M.A. Korefov, S.H. Gekkiyeva 17

On the existence and uniqueness continuity solutions systems of linear Volterra equations with partial integrals ***A.S. Kalitvin, V.A. Kalitvin, N.I. Trusova 24***

Two problems for nonlinear Barbashin integro-differential equations with fractional partial derivative ***A.S. Kalitvin, V.A. Kalitvin 29***

PHYSICS

About the thermophoresis velocity solid moderately large spherical aerosol particle with R of the thermal conductivity depending on the radial coordinat ***E.R. Shchukin, N.V. Malay, Z.L. Shulimanova, A.A. Stukalov 37***

Thermophoresis non-uniform of cylindrical aerosol particles

E.R. Shchukin, N.V. Malay, Z.L. Shulimanova 45

The shift of Energy levels of a quantum dot in single electron transistor ***M. R. Mohebbifar, R. Kh. Gainutdinov, M. A. Khamadeev 56***

Energy resolution of the spectrometer based on uncooled planar Si detector and pre-amplifier with capacitive and resistive capacitive feedback ***O.S. Deiev, A.A. Mazilov, S.V. Naumov, M.Yu. Shulika 62***

Hopping conductivity in $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.4})_3\text{As}_2$ single crystals ***V.S. Zakhvalinskiĭ, T.B. Nikulicheva, E. Lähderanta, M.A. Shahov, E.A. Pilyuk, S.V. Ivanchihin 71***

Dynamic theory coherent X-ray radiation by beam of relativistic electrons in single-crystal. ***S.V. Blazhevich, A.V. Noskov 79***

Members of editorial board:

S.V. Blazhevich,

Professor (Belgorod State National Research University)

A.N. Belyakov,

Professor (Belgorod State National Research University)

I.P. Borisovskiy,

Associated Professor (Belgorod State National Research University)

A.G. Brusentsev

Professor (Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov)

I.E. Vnukov,

Professor (Belgorod State National Research University)

A.V. Glushak,

Professor (Belgorod State National Research University)

R. Kawalla,

Professor of Tehische Universitat Bergakademie Freiberg

V.V. Krasilnikov,

Professor (Belgorod State National Research University)

A.P. Soldatov,

Professor (Belgorod State National Research University)

V.V. Syshchenko,

Professor (Belgorod State National Research University)

Dynamic theory X-ray radiation by relativistic electron in composite target. **S.V. Blazhevich, S.N. Nemtsev, A.V. Noskov, R.A. Zagorodnyuk 95**

Functional parameters of hexagonal nanocrystals of ferrite as medium for magnetizing **S.V. Blazhevich, T.G. Kuzmicheva, L.V. Furda, L.P. Ol'khovik, N.V. Tkachenko, E.V. Shurinova 106**

MATHEMATICAL PHYSICS, MATHEMATICAL MODELING

Mathematical modeling of fluid filtration in a different geometries porous media **O.V. Galtsev, O.A. Galtseva 115**

On ciphers, not spreading distortions **S.M. Ratseev, V.M. Ratseev 127**

The articles are given in authors` editing.

Dummy layout by *A.V. Noskov, V.S. Beregova*
E-mail: noskov_a@bsu.edu.ru

Passed for printing 15.12.2015
Format 60×84/8
Typeface Georgia, Impact
Printer's sheets 17,4.
Order 255
Circulation 1000 copies
Date of publishing: 30.12.2015.

Subscription reference in The Russian Press common catalogue – 18078

Dummy layout is replicated at Publishing House "Belgorod", Belgorod State National Research University
Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОЛУПЛОСКОСТИ MIXED PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY IN A HALF-PLANE

А.П. Солдатов, О.А. Тарасова
A. P. Soldatov, O. A. Tarasova

Белгородский национальный исследовательский университет, Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia
E-mail: soldatov48@gmail.com, tarasova_o@bsu.edu.ru

Ключевые слова: Система Ламе, упругость, изотропная среда, эллиптическая система.
Key words: The system of Lamé, elastic, isotropic medium, an elliptic system.

Аннотация. Рассмотрена смешанная плоской изотропной теории упругости в полуплоскости, когда на отрезках вещественной оси попеременно задаются либо вектор смещения, либо нормальная компонента тензора напряжений. Получена явная формула решения этой задачи, аналогичная известной формуле Келдыша – Седова для полуплоскости.

Resume. Considered mixed flat isotropic theory of elasticity in a half-plane, when the segments of the real axis are set alternately to either vector displacement or the normal component of the stress tensor. Obtain an explicit formula for the solution of this task is similar to the well-known formula of Keldysh – Sedov for the half plane.

Введение. Постановка задачи

Рассмотрим в верхней полуплоскости $D = \{y > 0\}$ систему Ламе [1.2] в изотропной среде

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a_{12} + a_{21}) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

с постоянными коэффициентами

$$a_{11} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad a_{22} = \begin{pmatrix} \alpha_3 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \end{pmatrix},$$

$$a_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 - 2\alpha_3 \\ \alpha_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_{21} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_3 \\ \alpha_1 - 2\alpha_3 & 0 \end{pmatrix},$$

где матричные элементы (модули упругости) подчинены условиям $\alpha_j > 0, j = 1, 3$ и $\alpha_1 > \alpha_3$.

Помимо вектора смещения $u = (u_1, u_2)$ упругая среда характеризуется тензором напряжений

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & \sigma_2 \end{pmatrix},$$

столбцы $\sigma_{(1)}, \sigma_{(2)}$ которого связан с u соотношениями

$$\sigma_{(i)} = a_{i1} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{i2} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

составляющими содержание закона Гука.

При отсутствии массовых сил матрица σ удовлетворяет уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{(2)}}{\partial y} = 0, \quad \text{которые совместно с (2) и приводят к системе Ламе (1).}$$



Столбцы тензора напряжений удобно описывать в форме частных производных так называемой сопряженной функции V . В соответствии с (1) эта функция определяется соотношением

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

В терминах сопряженной функции равенства (2) можем переписать в форме

$$\sigma_{(1)} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \sigma_{(2)} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3)$$

Рассмотрим эллиптическую систему первого порядка специального вида

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad J = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Решения $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ этой системы назовем функциями, аналитическими по Дуглису, или кратко, J – аналитическими функциями. Прямая проверка показывает, что подстановка

$$\phi_1(x, y) = \psi_1(z) + y\psi_2(z), \quad \phi_2(x, y) = \psi_2(z) \quad (4)$$

осуществляет взаимно однозначное соответствие между J – аналитической вектор- функцией ϕ и вектор- функцией ψ переменной $z = x + iy$, аналитической в верхней полуплоскости D . Обратное преобразование дается аналогичной формулой

$$\psi_1(z) = \phi_1(x, y) - y\phi_2(x, y), \quad \psi_2(z) = \phi_2(x, y). \quad (5)$$

Согласно [3] любое решение u системы Ламе (1) и сопряженная к нему вектор- функция V в области D выражаются через J – аналитическую функцию ϕ . Более точно, они представимы в виде

$$u = \operatorname{Re} b\phi, \quad v = \operatorname{Re} c\phi + \xi, \quad (6)$$

$\xi \in \mathbb{R}^2$, причем ϕ определена однозначно с точностью до постоянного слагаемого.

Анализ полученных результатов

Матрицы b и c определяются равенствами

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & -j \end{pmatrix}, \quad c = \alpha_3 \begin{pmatrix} -2i & j-1 \\ 2 & (j+1)i \end{pmatrix}, \quad j = \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_3}. \quad (7)$$

Рассмотрим на прямой \mathbb{R} , играющей роль границы для верхней полуплоскости D , множество F точек $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{2m}$. Пусть I^0 есть объединение отрезков $I_j^0 = [\tau_{2j-1}, \tau_{2j}]$, $1 \leq j \leq m$.

Дополнение к $I^0 \setminus F$, которое обозначим I^1 , также состоит из m отрезков $I_j^1 = [\tau_{2j}, \tau_{2j+1}]$,

$1 \leq j \leq m$, из которых I_m^1 неограничен и имеет вид $(-\infty, \tau_1] \cup [\tau_{2m}, +\infty)$. Пусть еще F_0 множество точек τ_{2j} с четными номерами, которые служат правыми (левыми) концами отрезков, составляющих $I^0(I^1)$.

Смешанная задача S заключается в отыскании решения $u = (u_1, u_2) \in C(\bar{D})$ системы (1) по краевым условиям

$$u^+|_{I^0} = f^0, \quad \sigma_{(2)}^+|_{I^1} = g^1, \tag{8}$$

где $u^+(x) = u(x, 0)$ означает граничное значение функции u и аналогичный смысл имеет это обозначение для второго столбца тензора напряжений σ . Правые части здесь $f^0 \in C(I^0)$, $g^1 \in C(I^1 \setminus F)$ и, соответственно, решение u предполагается непрерывно дифференцируемым вплоть до граничного множества $I^1 \setminus F$. Если f^1 -- первообразная функции $-g^1$, то силу (2) последнее краевое условие можем записать в форме $v^+ = f^1 + \chi$ с некоторой функцией χ , постоянной на каждом отрезке I_k^1 , $1 \leq k \leq m$. Таким образом, вместо (8) можем перейти к краевому условию

$$u^+|_{I^0} = f^0, \quad v^+|_{I^1} = f^1 + \chi, \tag{9}$$

по отношению к u и сопряженной функции v . Конечно, вместе с u определению здесь подлежит и кусочно постоянная функция χ .

На основании (6) краевое условие (9) можем переписать в форме

$$\operatorname{Re} b \phi^+|_{I^0} = f^0, \quad \operatorname{Re} c \psi^+|_{I^1} = f^1 + \chi, \tag{10}$$

по отношению к J – аналитической функции ϕ . Поскольку при подстановке (4) граничные значения функций ϕ и ψ на прямой \mathbf{R} совпадают, эта задача равносильна аналогичной задаче

$$\operatorname{Re} b \psi^+|_{I^0} = f^0, \quad \operatorname{Re} c \psi^+|_{I^1} = f^1 + \chi, \tag{11}$$

для аналитической вектор-функции ψ .

Стандартным образом [4] задачу (11) можно свести к задаче линейного сопряжения на прямой \mathbf{R} . С этой целью продолжим ψ в нижнюю полуплоскость, полагая $\psi(z) = -\overline{\psi(\bar{z})}$, $\operatorname{Im} z < 0$. Тогда краевое условие (11) перейдет в

$$\psi^+ - G\psi^- = g \tag{12}$$

с данными

$$G(t) = \begin{cases} cb^{-1}\bar{b}\bar{c}^{-1}, & t \in I^0, \\ 1, & t \in I^1, \end{cases} \quad g(t) = \begin{cases} 2cb^{-1}f^0(t), & t \in I^0, \\ 2[f^1(t) + \chi(t)], & t \in I^1. \end{cases}$$

Из (6) видно, что $d^{-1}(cb^{-1}\bar{b}\bar{c}^{-1})d = -\begin{pmatrix} \text{ж} & 0 \\ 0 & \text{ж}^{-1} \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$.

Пользуясь этим соотношением, задачу (12) можно решить явно классическими методами [4], построив каноническую матрицу-функцию $Y(z)$. Возвращаясь от этого решения ψ к J -аналитической функции ϕ по формуле (5), приходим к соответствующему решению



задачи (10). Последнее в свою очередь с учетом (6) приводит к решению исходной задачи. Каноническая матрица- функция Y строится следующим образом.

Рассмотрим аналитические вне I^0 аналитические функции

$$Y_1(z) = X(z)e^{iL(z)}, \quad Y_2(z) = X(z)e^{-iL(z)},$$

где

$$X(z) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{z - \tau_{2k}}{z - \tau_{2k-1}} \right)^{i\alpha}, \quad \alpha = \frac{\ln j}{2\pi}, \quad L(z) = -\frac{\ln j}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{z - \tau_{2k}}{z - \tau_{2k-1}} \right),$$

и ветви логарифмов определяется условием $\ln 1 = 0$. В этих обозначениях

$$Y = d \begin{pmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ iY_1 & -iY_2 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица- функция Y является канонической для задачи (11) и ее терминах можем сформулировать центральный результат о разрешимости задачи (10).

Теорема 1. Пусть $f^j \in H(I^j)$, $j = 0, 1$ и

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} (cb^{-1})f^0(t), & t \in I^0, \\ f^1(t) + \chi(t), & t \in I^1. \end{cases}$$

Тогда задача (10) относительно пары (ψ, χ) однозначно разрешима в классе $H(\bar{D})$, причем кусочно – постоянная функция χ на I^1 определяется из соотношений

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{(Y^+)^{-1}(t)\tilde{f}(t)dt}{(t+i)^s} = 0, \quad 1 \leq s \leq m.$$

а решение Ψ дается формулой

$$\psi(z) = \frac{Y(z)}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{(Y^+)^{-1}(t)\tilde{f}(t)dt}{t-z}, \quad z \in D.$$

Список литературы

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.
2. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963.
3. Солдатов А.П., К теории анизотропной плоской теории упругости, Современная математика. Фундаментальные направления, 2015.
4. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

References

1. Muskhelishvili N. I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. M., 1966.
2. Kupradze V.D. Potential methods in elasticity theory. M.: Physmathgiz, 1963.
3. Soldatov A. P., The theory of anisotropic plane theory of elasticity, Contemporary mathematics. Fundamental directions, 2015,
4. Muskhelishvili N. I. Singular integral equations. M.: Science, 1968.

УДК 517.9

**О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА-ФРЕДГОЛЬМА
С ДРОБНЫМИ И ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ**

**ON NUMERICAL SOLUTION OF VOLTERRA-FREDHOLM EQUATIONS
WITH FRACTIONAL AND PARTIAL INTEGRALS**

**В.А. Калитвин
V. A. Kalitvin**

*Липецкий государственный педагогический университет,
Россия, 398020, г. Липецк, ул. Ленина, д. 42
Lipetsk State Pedagogical University, 42, Lenina St, Lipetsk, 398020, Russia
E-mail: kalitvin@mail.ru*

Ключевые слова: интегральное уравнение, интегральное уравнение Вольтерра – Фредгольма с частными интегралами, метод механических квадратур, оценка погрешности

Key words: integral equation, Volterra-Fredholm equation with partial integrals, mechanical quadratures method, error estimate

Аннотация. Изучается применение метода механических квадратур к решению линейных интегральных уравнений Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами и с неограниченным ядром. Рассматривается алгоритм численного решения и его сходимости.

Resume. The application of mechanical quadratures method to solution of Volterra-Fredholm linear integral equations with partial integrals and with unbonded kernel is studied. The algorithm for numerical solution and its convergence is studied.

Постановка задачи

В [1] дано обоснование численного решения интегральных уравнений Вольтерра с частными интегралами и непрерывными ядрами методом механических квадратур. В [2,3] рассмотрены задачи механики сплошных сред, которые приводятся к интегральным уравнениям Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами с непрерывными и с неограниченными ядрами. В связи с этим в данной работе метод механических квадратур применяется к решению линейных интегральных уравнений Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами, одно из ядер которого не ограничено.

Рассматривается интегральное уравнение Вольтерра-Фредгольма

$$x(t, s) = \int_0^t \frac{x(\tau, s)}{(t - \tau)^\alpha} d\tau + \int_0^1 m(t, s, \sigma)x(t, \sigma)d\sigma + f(t, s) \equiv (Vx)(t, s) + f(t, s) \quad (1)$$

с частными интегралами, где $0 < \alpha < 1$, $t, s \in [0, 1]$, $m(t, s, \sigma)$ и $f(t, s)$ – заданные непрерывные функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега. При $m(t, s, \sigma) = 0$, $s = 0$, $x(t, 0) = y(t)$ и $f(t, 0) = h(t)$ уравнение (1) является уравнением Абеля.

Отметим, что применение метода механических квадратур к уравнению (1) требует обоснования, так как оператор V в правой части уравнения (1) не является вполне непрерывным, а известные обоснования метода механических квадратур для обычных интегральных уравнений используют полную непрерывность интегральных операторов в этих уравнениях.



**Переход от уравнения (1) к уравнению
с частными интегралами и непрерывными ядрами**

Уравнение (1) имеет единственное решение в пространстве $C(D)$ непрерывных на $D = [0, 1] \times [0, 1]$ функций, если в $C(D)$ обратим оператор $I - M$ [4,5], где оператор M определяется равенством

$$(Mx)(t, s) = \int_0^1 m(t, s, \sigma)x(t, \sigma)d\sigma.$$

Будем предполагать обратимость в $C(D)$ оператора $I - M$.

Учитывая представление резольвенты для уравнения

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau + h(t) \quad (0 < \alpha < 1)$$

в виде

$$R(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\Gamma(1-\alpha)t^{1-\alpha})^n}{t\Gamma(n(1-\alpha))}$$

[6, с. 176], где через $\Gamma(z)$ обозначена гамма-функция

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} y^{z-1} e^{-y} dy,$$

уравнение (1) запишем в виде

$$x(t, s) = \int_0^1 m(t, s, \sigma)x(t, \sigma)d\sigma + \int_0^t \int_0^1 R(\tau)m(\tau, s, \sigma)x(\tau, \sigma)d\tau d\sigma + g(t, s), \quad (2)$$

где

$$g(t, s) = f(t, s) + \int_0^t R(\tau)f(\tau, s)d\tau.$$

Оператор V_δ определим равенством

$$(V_\delta x)(t, s) = \int_0^1 m(t, s, \sigma)x(t, \sigma)d\sigma + \int_0^t \int_{\delta 0}^1 R(\tau)m(\tau, s, \sigma)x(\tau, \sigma)d\tau d\sigma,$$

где $\delta > 0$. При сделанных предположениях уравнение Вольтерра-Фредгольма

$$x(t, s) = (V_\delta x)(t, s) + g(t, s) \quad (3)$$

с частными интегралами имеет единственное решение x_δ в $C(D)$ [4,5].

Покажем, что при $\delta \rightarrow 0$ решение x_δ уравнения (3) стремится к решению уравнения (2).

Имеем

$$x(t, s) - x_\delta(t, s) = \int_0^1 m(t, s, \sigma)[x(t, \sigma) - x_\delta(t, \sigma)]d\sigma + \int_0^{\delta 1} \int_0^1 R(\tau)m(\tau, s, \sigma)x(\tau, \sigma)d\tau d\sigma + \\ + \int_{\delta 0}^{t 1} \int_0^1 R(\tau)m(\tau, s, \sigma)[x(\tau, \sigma) - x_\delta(\tau, \sigma)]d\tau d\sigma.$$

Последнее уравнение будем рассматривать как уравнение относительно неизвестной функции $y(t, s) = x(t, s) - x_\delta(t, s)$. Тогда

$$y(t, s) = \int_0^1 m(t, s, \sigma)y(t, \sigma)d\sigma + \int_{\delta 0}^{t 1} \int_0^1 R(\tau)m(\tau, s, \sigma)y(\tau, \sigma)d\tau d\sigma + h(t, s), \quad (4)$$

где

$$h(t, s) = \int_0^{\delta 1} \int_0^1 R(\tau)m(\tau, s, \sigma)x(\tau, \sigma)d\tau d\sigma. \quad (5)$$

Принимая во внимание, что в (5) x — фиксированная функция из $C(D)$ и учитывая абсолютную непрерывность интеграла Лебега в правой части равенства (5), заключаем, что в $C(D)$ $h \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Отсюда и единственности решения уравнения (4) в $C(D)$ вытекает, что в $C(D)$ $y \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Следовательно, в $C(D)$ $x_\delta \rightarrow x$ при $\delta \rightarrow 0$.

Оценка погрешности

Условие $x_\delta \rightarrow x$ при $\delta \rightarrow 0$ позволяет принять за приближенное решение уравнения (2) (уравнения (1)) функцию x_δ при достаточно малом $\delta > 0$. Оценка погрешности такой замены совпадает с оценкой решения уравнения (4).

Пусть обратный оператор $(I - M)^{-1}$ допускает представление

$$(I - M)^{-1}x(t, s) = x(t, s) + \int_0^1 r_m(t, s, \sigma)x(t, \sigma)d\sigma, \quad (6)$$

где резольвента $r_m(t, s, \sigma)$ есть непрерывная по совокупности переменных функция. Применяя равенство (6), уравнение (4) запишем в виде

$$y(t, s) = \int_{\delta 0}^{t 1} \int_0^1 R(\tau)m_1(t, s, \tau, \sigma)y(\tau, \sigma)d\tau d\sigma + h_1(t, s),$$

где

$$m_1(t, s, \tau, \sigma) = \int_0^1 m(t, s, \sigma_1)m(\tau, \sigma_1, \sigma)d\sigma_1,$$

$$h_1(t, s) = h(t, s) + \int_0^1 m_1(t, s, \tau, \sigma)h(t, \sigma)d\sigma.$$



Пусть x — решение уравнения (2) и $\|x\| \leq X$, где X — некоторое положительное число.

Из (5) имеем

$$\|h\| \leq X \int_0^{\delta} \int_0^1 |R(\tau)m(\tau, s, \sigma)| d\tau d\sigma.$$

Учитывая абсолютную непрерывность последнего интеграла, выберем для произвольного $\varepsilon_1 > 0$ такое $\delta > 0$, чтобы

$$\int_0^{\delta} \int_0^1 |R(\tau)m(\tau, s, \sigma)| d\tau d\sigma < \varepsilon_1 X.$$

Тогда $\|h\| < \varepsilon_1$.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$z(t, s) = \tilde{M} \int_{\delta}^t \int_0^1 R(\tau)z(\tau, \sigma) d\tau d\sigma + \varepsilon_1 \equiv (R_{\delta}z)(t, s) + \varepsilon_1, \quad (6)$$

где число $\tilde{M} > 0$ выбрано так, что $|m(t, s, \sigma)| \leq \tilde{M}$.

Уравнение (6) имеет единственное решение в $C(D)$, в виду равенства нулю спектрального радиуса действующего в пространстве $C(D)$ оператора R_{δ} . В силу [3-5] единственное решение уравнения (6) может быть записано в виде

$$z(t, s) = \varepsilon_1 \int_{\delta}^t \int_0^1 r_{\delta}(t, s, \tau, \sigma) d\tau d\sigma + \varepsilon_1 = \varepsilon_1 (1 + \int_{\delta}^t \int_0^1 r_{\delta}(t, s, \tau, \sigma) d\tau d\sigma), \quad (7)$$

где $r_{\delta}(t, s, \tau, \sigma)$ — резольвента интегрального уравнения (6). Из равенства (7) имеем

$$\|z\| \leq \varepsilon_1 (1 + \sup_{(t,s)} \int_{\delta}^t \int_0^1 |r_{\delta}(t, s, \tau, \sigma)| d\tau d\sigma). \quad (8)$$

Полагая в (8)

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \max(1 + \sup_{(t,s)} \int_{\delta}^t \int_0^1 |r_{\delta}(t, s, \tau, \sigma)| d\tau d\sigma), \quad (9)$$

получим $\|z\| < \varepsilon$. Следовательно, $\|y\| \leq \|z\| < \varepsilon$.

Таким образом, для получения оценки погрешности $\|y\|$ достаточно оценить X и

$$Y_{\delta} = \sup_{(t,s)} \int_{\delta}^t \int_0^1 |r_{\delta}(t, s, \tau, \sigma)| d\tau d\sigma. \quad (10)$$

Для оценки числа X уравнение (2) запишем в виде

$$x(t, s) - \int_0^1 m(t, s, \sigma)x(t, \sigma) d\sigma = \int_0^t \int_0^1 R(\tau)m(\tau, s, \sigma)x(\tau, \sigma) d\tau d\sigma + g(t, s)$$

и к обеим частям последнего уравнения применим оператор $(I - M)^{-1}$. В результате получим уравнение

$$x(t, s) = \int_0^t \int_0^1 R(\tau) [m(\tau, s, \sigma) + m_1(t, s, \tau, \sigma)] x(\tau, \sigma) d\tau d\sigma + g_1(t, s) \equiv (Rx)(t, s) + g_1(t, s), \quad (11)$$

где

$$m_1(t, s, \tau, \sigma) = \int_0^1 r_m(t, s, \sigma_1) m(\tau, \sigma_1, \sigma) d\sigma_1,$$

$$g_1(t, s) = g(t, s) + \int_0^1 r_m(t, s, \sigma_1) g(t, \sigma_1) d\sigma_1,$$

а $r_m(t, s, \sigma_1)$ — резольвента интегрального уравнения $x - Mx = g$.

Так как спектральный радиус оператора R из уравнения (11) равен нулю, то уравнение (11) имеет единственное решение в $C(D)$ и оно может быть записано в виде $x = (I - R)^{-1} g_1$. Если теперь известна оценка нормы оператора $(I - R)^{-1}$, то $\|x\| \leq \|(I - R)^{-1}\| \cdot \|g_1\|$. Таким образом,

$$X \leq \|(I - R)^{-1}\| \cdot \|g_1\|. \quad (12)$$

Отметим, что оценка нормы оператора $(I - R)^{-1}$ представляет собой весьма сложную задачу, однако для некоторых классов ядер $m(t, s, \sigma)$ функция $r_m(t, s, \sigma)$, следовательно, и функция $R(\tau) [m(\tau, s, \sigma) + m_1(t, s, \tau, \sigma)]$ выписываются явно, а оценка для нормы оператора $(I - R)^{-1}$ может быть получена с использованием рядов Неймана.

Для оценки числа Y_δ может быть использована любая оценка сверху резольвенты интегрального уравнения (6). В силу (6) и [3-5] Y_δ вычисляется по формуле (10), где

$$r(t, s, \tau, \sigma) = \sum_{p=1}^{\infty} n^{(p)}(t, s, \tau, \sigma), \quad (13)$$

$$n^{(1)}(t, s, \tau, \sigma) = MR(\tau), \quad n^{(p)}(t, s, \tau, \sigma) = \int_{\tau}^t \int_0^1 MR(u) n^{(p-1)}(u, v, \tau, \sigma) dudv$$

($p = 2, 3, \dots$). Из (10) вытекает, что $Y_\delta \leq Y$, где

$$Y = \sup_{(c,d)} \int_0^1 \int_0^1 |r(t, s, \tau, \sigma)| d\tau d\sigma, \quad (14)$$

а $r(t, s, \tau, \sigma)$ определяется равенством (13).

Из приведенных рассуждений видно, что за приближенное решение уравнения (2) можно принять решение уравнения (3) при достаточно малом $\delta > 0$. Действительно, для произвольного $\varepsilon_1 > 0$ выберем $\delta > 0$ настолько малым, чтобы выполнялось неравенство



$$\int_0^{\delta} \int_0^1 |R(\tau)m(\tau, s, \sigma)| d\tau d\sigma < \frac{\varepsilon_1}{X},$$

где X удовлетворяет неравенству (12). В силу (9) и (14)

$$\|x - x_{\delta}\| = \|y\| \leq \varepsilon_1 \max(X, 1 + \sup_{(t,s)} \int_0^1 |r(t, s, \tau, \sigma)| d\tau d\sigma). \quad (15)$$

Тогда $x(t, s) \approx x_{\delta}(t, s)$ с погрешностью, определяемой правой частью неравенства (15).

Численное решение уравнения (2)

В силу приближенного равенства $x(t, s) \approx x_{\delta}(t, s)$ при численном решении уравнения (2) может быть использовано численное решение уравнения (3).

Уравнение (3) имеет непрерывные на $[\delta, 1] \times [0, 1]$ ядра и непрерывную функцию $g(t, s)$. Для численного решения этого уравнения может быть использован метод механических квадратур, рассмотренный в [1].

Отрезки $[\delta, 1]$ и $[0, 1]$ разобьем на части точками

$$t_p = \delta + ph \quad (p = 0, 1, \dots, P, \delta + Ph \leq 1 < (P+1)h), \quad s_q = qg \quad (q = 0, 1, \dots, Q, Qg \leq d < (Q+1)g)$$

соответственно. Подставляя $t = t_p$ и $s = s_q$ в (3) и заменяя интегралы по формулам

$$\int_0^1 m(t_p, s_q, \sigma)x(t_p, \sigma)d\sigma = g \sum_{j=0}^Q \beta_{jq} m_{pqj} x(t_p, s_j) + r_{pq}^m, \quad (16)$$

$$\int_{\delta}^{t_p} \int_0^1 R(\tau)m(\tau, s_q, \sigma)x(\tau, \sigma)d\tau d\sigma = hg \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^Q \gamma_{pqij} n_{pqij} x(t_i, s_j) + r_{pq}^n, \quad (17)$$

где $m_{pqj} = m(t_p, s_q, s_j)$, $n_{pqij} = R(t_i)m(t_i, s_q, s_j)$ и r_{pq}^m , r_{pq}^n — остатки этих формул, получим систему

$$\begin{aligned} x(t_0, s_0) &= g(t_0, s_0), \quad x(t_p, s_0) = g(t_p, s_0), \quad x(t_0, s_q) = g \sum_{j=0}^Q \beta_{jq} m_{0qj} x(t_0, s_j) + g(t_0, s_q) + r_{0q}^m, \\ x(t_p, s_q) &= g \sum_{j=0}^Q \beta_{jq} m_{pqj} x(t_p, s_j) + hg \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^Q \gamma_{pqij} n_{pqij} x(t_i, s_j) + g(t_p, s_q) + r_{pq}^m + r_{pq}^n \end{aligned} \quad (18)$$

($p = 1, \dots, P; q = 1, \dots, Q$).

Отбрасывая в (18) остатки, получим систему уравнений для приближенных значений x_{0q}, x_{pq} функции x в точках $(t_0, s_q), (t_p, s_q)$ ($p = 1, \dots, P; q = 1, \dots, Q$). Пусть δ_{0q} , δ_{pq} — погрешности, которые могут быть получены при вычислениях x_{0q} , x_{pq} . Тогда неизвестные x_{0q} , x_{pq} удовлетворяют системе уравнений

$$x_{0q} = g \sum_{j=0}^Q \beta_{jq} m_{0qj} x_{0j} + g_{0q} + \delta_{0q}, \quad x_{pq} = g \sum_{j=0}^Q \beta_{jq} m_{pqj} x_{pj} + hg \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^Q \gamma_{pqij} n_{pqij} x_{ij} + g_{pq} + \delta_{pq} \quad (19)$$

($p = 1, \dots, P; q = 1, \dots, Q$), где $g_{0q} = g(t_0, s_q)$, $g_{pq} = g(t_p, s_q)$.

Таким образом, при всех достаточно малых h и g приближенное решение x_{pq} может быть найдено по формулам (19), причем для каждого заданного $\varepsilon > 0$ существуют такие h_0 и g_0 , что

$$|x_{pq} - x(t_p, s_q)| < \varepsilon \quad (p = 0, 1, \dots, P; q = 0, 1, \dots, Q)$$

для $h < h_0$ и $g < g_0$, если выполнены следующие условия:

а) погрешности r_{pq}^m и r_{pq}^n квадратурной формулы (16) и кубатурной формулы (17) стремятся к нулю равномерно относительно p, q при $h, g \rightarrow 0$;

б) существуют такие числа A и B , что выполняются неравенства

$$|\beta_{jq}| \leq A < \infty, \quad |\gamma_{pqij}| \leq B < \infty;$$

в) погрешности δ_{0q} , δ_{pq} стремятся к нулю равномерно относительно p, q при $h, g \rightarrow 0$;

г) оператор $I - M$ обратим в $C(D)$, а система (19) имеет единственное решение при всех достаточно малых h и g .

При сделанных предположениях аналитическое приближение $x_{pq}(t, s)$ решения $x(t, s)$ уравнения (3) естественно определить равенством

$$x_{pq}(t, s) = g \sum_{j=0}^q \beta_{jq} m(t, s, s_j) x_{pj} + hg \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q \gamma_{pqij} R(t_i) m(t_i, s, s_j) x_{ij} + g(t, s). \quad (20)$$

В этом случае $\sup_{[\delta, 1] \times [0, 1]} |x_{pq}(t, s) - x(t, s)| \rightarrow 0$ при $p, q \rightarrow \infty$.

Формулы (19) и (20) получены для уравнения (3). Однако за численное и аналитическое решения уравнения (2) при достаточно малом $\delta > 0$ можно принять решения уравнения (3), определенные на $[\delta, 1] \times [0, 1]$ по формулам (19) и (20) соответственно, так как в силу раздела 2 решение x_δ уравнения (3) стремится к решению x уравнения (2) при $\delta \rightarrow 0$.

Благодарности. Работа поддержана Минобрнауки России (задание № 2015/351, НИР № 1815).

Список литературы

1. Kalitvin V.A. Numerical Solution of Linear Volterra Equations with Partial Integrals // Journal of Mathematical Sciences, July 2015. V. 208, 2. Pp. 168-173.
2. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. 560 pp.
3. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами. Воронеж: ЦЧКИ, 2000. 252 с.



4. Калитвин А.С., Калитвин В.А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ, 2006. 177с.
5. Калитвин А.С., Фролова Е.В. Линейные уравнения с частными интегралами. С-теория. Липецк: ЛГПУ, 2004. 195 с.
6. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.4. Часть 1. М.: Наука, 1974. 336 с.

References

1. Kalitvin V.A. Numerical Solution of Linear Volterra Equations with Partial Integrals // Journal of Mathematical Sciences, July 2015. V. 208, 2. Pp. 168-173.
2. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. 560 pp.
3. Kalitvin A.S. Linear operators with partial integrals. Voronezh: CHKI, 2000. 252 pp.
4. Kalitvin A.S., Kalitvin V.A. Integral equations of Volterra and Volterra-Fredholm with partial integrals. Lipetsk: LGPU, 2006. 177 pp.
5. Kalitvin A.S., Frolova E.V. Linear equations with partial integrals. C-theory. Lipetsk: LGPU, 2004. 195 pp.
6. Smirnov V.I. Course of higher mathematics. V. 1. P. 1. M.: The Science, 1974. 336 pp.

УДК 517.95

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА С ДРОБНОЙ ПО ВРЕМЕНИ ПРОИЗВОДНОЙ В МНОГОМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

BOUNDARY PROBLEM FOR THE MODIFIED EQUATION MOISTURE WITH FRACTIONAL TIME DERIVATIVE IN MULTIDIMENSIONAL DOMAINS

М.А. Керэфов¹, С.Х. Геккиева²

M.A. Korefov, S.H. Gekkiyeva

¹Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, Россия, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173

Kabardino-Balkarian State University, 173 Chernyshevsky St, Nalchik, 3600004, Russia

²Институт прикладной математики и автоматизации, Россия, 360004, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 а

Institute of Applied Mathematics and Automation, 89 a Shortanova St, Nalchik, 3600004, Russia

E-mail: kerefov@mail.ru; gekkiyeva_s@mail.ru

Ключевые слова: модифицированное уравнение влагопереноса, производная дробного порядка, априорная оценка.

Key words: modified equation of moisture transfer, a derivative of fractional order, a priori estimate.

Аннотация. В данной работе рассматриваются краевые задачи первого и третьего рода для модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной в многомерной области. С помощью энергетических неравенств получены априорные оценки для решений рассматриваемых задач.

Resume. In this paper we consider boundary value problems of the first and third order for the modified equation of moisture transfer with a fractional derivative with respect to time in the multidimensional field. With energy inequalities, a priori estimates for solutions to the problems.

Введение

Перенос влаги в почво-грунтах приводит к модифицированному уравнению диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(u) \frac{\partial u}{\partial x} + A \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right), \tag{1}$$

которое предполагает сплошность среды. Уравнению (1) при различных краевых условиях посвящены работы [1], [7]-[10].

Исходя из того, что почва является примером фрактальной среды, где имеет место зависимость потока $q=q(x,t)$ от структуры (геометрии) фрактала возникает возможность обобщения уравнения (1) с помощью введения дробной по времени производной. Подобное обобщение можно сделать, определяя поток по формуле [6]

$$q(x,t) = -D_{0t}^{\alpha} \left(D(u) \frac{\partial u}{\partial x} + A \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right), \tag{2}$$

где k, α - положительные величины, α зависит от структуры и хаусдорфсовской размерности фрактала, D_{0t}^{α} - оператор дробного дифференцирования [5].

Предположим, что функция $u(x,t)$ имеет производную по t порядка α , ($0 < \alpha \leq 1$), по x до второго порядка. Тогда из (2) и уравнения неразрывности $\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial t}$, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_{0t}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left(D(u) \frac{\partial u}{\partial x} + A \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)$$



Подействовав на обе части последнего уравнения оператором дробного дифференцирования порядка α , получим обобщенное уравнение влагопереноса с регуляризованной производной [2], [3] в виде:

$$D_{0t}^{1-\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(u) \frac{\partial u}{\partial x} + A \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) + \frac{u(x,0)}{\Gamma(\alpha) t^{1-\alpha}}.$$

Априорная оценка для решения первой краевой задачи в многомерной области

В цилиндре $Q_T = G \times (0, T]$, где $G = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_h) : 0 < x_k < l_k, k = 1, 2, \dots, p\}$ – p мерный параллелепипед с границей Γ рассмотрим задачу

$$D_{0t}^\alpha u = Lu + f(x, y), \quad x \in G, \quad 0 < t \leq T \quad (3)$$

$$u|_\Gamma = 0, \quad t \leq 0 \quad (4)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{G} \quad (5)$$

где

$$D_{0t}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{u(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$Lu = \sum_{k=1}^p L_k u, \quad L_k u = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(b_k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + A \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} - q_k(x, t) u,$$

$$b_k \geq c_k > 0, \quad A > 0, \quad q_k \geq m > 0.$$

Единственность решения первой краевой задачи для уравнения (3) реализуем методом априорных оценок. Для чего умножим уравнение (3) скалярно на u :

$$(D_{0t}^\alpha u, u) = \left(\sum_{k=1}^p \left(b_k u_{x_k} \right)_{x_k} + Au_{x_k x_k t} - q_k u \right), u) + (f, u), \quad (6)$$

где $(u, v) = \int_G u v dx$, $(u, u) = \|u\|_0^2$.

Правую часть тождества (6), с учетом граничных условий перепишем следующим образом.

Так как

$$\int_0^{l_k} \left(b_k u_{x_k} \right)_{x_k} u dx_k = b_k u_{x_k} (x_1, \dots, x_{k-1}, l_k, x_{k+1}, \dots, x_p, t) u(x_1, \dots, x_{k-1}, l_k, x_{k+1}, \dots, x_p, t) -$$

$$- u_{x_k} (x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_p, t) u(x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_p, t) - \int_0^{l_k} b_k u_{x_k}^2 dx_k = - \int_0^{l_k} b_k u_{x_k}^2 dx_k,$$

то

$$\sum_{k=1}^p \left(b_k u_{x_k} \right)_{x_k}, u) = - \sum_{k=1}^p \int_G b_k u_{x_k}^2 dx_k,$$

$$A \int_0^{l_k} u_{x_k x_k t} u dx_k = Au_{x_k t} u|_0^{l_k} - A \int_0^{l_k} u_{x_k t} u_{x_k} dx_k = - \frac{A}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{l_k} u_{x_k}^2 dx_k,$$

$$\sum_{k=1}^p (Au_{x_k t}, u) = -A \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^p \int_G u_{x_k}^2 dx_k,$$

$$(qu, u) \geq m \|u\|_0^2.$$

Для оценки (f, u) воспользуемся неравенством Коши-Буняковского $|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|$ и ε -неравенством Юнга $|ab| \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2$:

$$(f, u) \leq \frac{1}{4\varepsilon} \|f\|_0^2 + \varepsilon \|u\|_0^2,$$

где $\varepsilon = \text{const} > 0$.

Подставляя полученные соотношения в (6), получим

$$(D_{0t}^\alpha u, u) + \sum_{k=1}^p \int_G b_k u_{x_k}^2 dx_k + A \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^p \int_G u_{x_k}^2 dx_k + m \|u\|_0^2 \leq \frac{1}{4\varepsilon} \|f\|_0^2 + \varepsilon \|u\|_0^2$$

или в силу $b_k \geq c_k > 0$ имеем

$$(D_{0t}^\alpha u, u) + c \|u_x\|_0^2 + \frac{A}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u_x\|_0^2 + m \|u\|_0^2 \leq \frac{1}{4\varepsilon} \|f\|_0^2 + \varepsilon \|u\|_0^2, \tag{7}$$

где $\|u_x\|_0^2 = \int_G u_x^2 dx = \sum_{k=1}^p \int_G u_{x_k}^2 dx_k$.

Проинтегрируем полученное в результате неравенство от 0 до t и учтем положительность оператора дробного дифференцирования $\int_0^t (D_{0\tau}^\alpha u, u) d\tau \geq 0$, доказанную для функции одной переменной в [4]. Тогда получим

$$c \|u_x\|_{2, Q}^2 + \frac{A}{2} \|u_x\|_0^2 + \nu_1 \|u\|_{2, Q}^2 \leq \frac{1}{4\varepsilon} \|f\|_{2, Q}^2 + \frac{A}{2} \|u_0'(x)\|_0^2,$$

$$\|u_x\|_{2, Q}^2 = \int_0^t \|u(x, \tau)\|_0^2 d\tau, \quad \nu_1 = m - \varepsilon.$$

При достаточно малом ε , вводя обозначение $\nu = \min\left(\frac{A}{2}, c, \nu_1\right)$, находим

$$\|u_x\|_0^2 + \|u_x\|_{2, Q}^2 + \|u\|_{2, Q}^2 \leq M \left(\|f\|_{2, Q}^2 + \|u_0'(x)\|_0^2 \right),$$

где $M = \text{const} > 0$, зависящая от коэффициентов уравнения и размеров области Q_{t_0} ,

$$\|u\|_{2, Q}^2 = \int_0^t \|u(x, \tau)\|_0^2 d\tau.$$

Из этой априорной оценки следует единственность решения задачи (3)-(5).

Априорная оценка для решения третьей краевой задачи в многомерной области

В цилиндре $Q_T = G \times (0, T]$, рассмотрим третью краевую задачу:

$$D_{0t}^\alpha u = Lu + f(x, y), \quad x \in G, \quad 0 < t \leq T, \tag{3}$$



$$\begin{cases} b_k(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_k} + A \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_k} = \beta_{-k} u - \mu_{-k}(t), & x_k = 0, \\ -b_k(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_k} + A \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_k} = \beta_{+k} u - \mu_{+k}(t), & x_k = l_k, \end{cases} \quad (8)$$

$$u(x,0) = 0, \quad (9)$$

$$\beta_{-k}, \beta_{+k} \geq 0, \quad \beta_{-k} + \beta_{+k} > 0, \quad k=1,2,\dots,p, \quad b_k \geq c_k > 0, \quad A > 0, \quad q_k \geq m > 0.$$

Умножим уравнение (3) скалярно на u :

$$(D_{0t}^\alpha u, u) = \left(\sum_{k=1}^p \left(b_k u_{x_k} \right)_{x_k} + Au_{x_k x_k t} - q_k u \right), u) + (f, u). \quad (10)$$

Правую часть тождества (10) перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^{l_k} \left(b_k u_{x_k} \right)_{x_k} u dx_k &= - \int_0^{l_k} b_k u_{x_k}^2 dx_k \\ A \int_0^{l_k} u_{x_k x_k t} u dx_k &= Au_{x_k t} (x_1, \dots, x_{k-1}, l_k, x_{k+1}, \dots, x_p, t) u(x_1, \dots, x_{k-1}, l_k, x_{k+1}, \dots, x_p, t) - \\ &- Au_{x_k t} (x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_p, t) u(x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_p, t) - A \int_0^{l_k} u_{x_k t} u_{x_k} dx_k \end{aligned}$$

С учетом граничных условий (8), имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{l_k} \left(b_k u_{x_k} \right)_{x_k} u dx_k + A \int_0^{l_k} u_{x_k x_k t} u dx_k &= b_k u_{x_k} (x_1, \dots, x_{k-1}, l_k, x_{k+1}, \dots, x_p, t) u(x_1, \dots, x_{k-1}, l_k, x_{k+1}, \dots, x_p, t) + \\ &+ Au_{x_k t} (x_1, \dots, x_{k-1}, l_k, x_{k+1}, \dots, x_p, t) u(x_1, \dots, x_{k-1}, l_k, x_{k+1}, \dots, x_p, t) - \\ &- Au_{x_k t} (x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_p, t) u(x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_p, t) - \\ &- b_k u_{x_k} (x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_p, t) u(x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_p, t) - \\ &- \int_0^{l_k} b_k u_{x_k}^2 u dx_k + A \int_0^{l_k} u_{x_k t} u_{x_k} dx_k \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_G \left(b_k u_{x_k} \right)_{x_k} u dx_k + A \int_G u_{x_k x_k t} u dx_k &= \\ = \int_{G'} \beta_{+k} u^2 (x_1, \dots, x_{k-1}, l_k, x_{k+1}, \dots, x_p, t) dx' + \int_{G'} \mu_{+k} u (x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_p, t) dx' - \\ - \int_{G'} \beta_{-k} u^2 (x_1, \dots, x_{k-1}, l_k, x_{k+1}, \dots, x_p, t) dx' + \int_{G'} \mu_{-k} u (x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_p, t) dx' - \\ - \int_G b_k u_{x_k}^2 u dx + A \int_G u_{x_k t} u_{x_k} dx \end{aligned}$$

где $dx' = dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_p$, $G' = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, p\}$;

$$(qu, u) \geq m \|u\|_0^2;$$

$$(f, u) \leq \frac{1}{4\varepsilon} \|f\|_0^2 + \varepsilon \|u\|_0^2,$$

где $\varepsilon = const > 0$.

Подставляя полученные соотношения в (10), получим

$$\begin{aligned} (D_{0t}^\alpha u, u) \leq & \sum_{k=1}^p \left(\int_{G'} \mu_{+k} u(x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_p, t) dx' + \int_{G'} \mu_{-k} u(x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_p, t) dx' - \right. \\ & - \int_{G'} \beta_{+k} u^2(x_1, \dots, x_{k-1}, l_k, x_{k+1}, \dots, x_p, t) dx' + \int_{G'} \beta_{-k} u^2(x_1, \dots, x_{k-1}, l_k, x_{k+1}, \dots, x_p, t) dx' - \\ & \left. - \int_G b_k u_{x_k}^2 dx - A \int_G u_{x_k} u_{x_k} dx \right) - m \|u\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|f\|_0^2 + \varepsilon \|u\|_0^2, \end{aligned}$$

или в силу $b_k \geq c_k > 0$,

$$\begin{aligned} (D_{0t}^\alpha u, u) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u\|_0^2 + c \|u_x\|_0^2 + m \|u\|_0^2 \leq & \sum_{k=1}^p \left(\int_{G'} \mu_{+k} u(x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_p, t) dx' + \right. \\ & \left. + \int_{G'} \mu_{-k} u(x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_p, t) dx' \right) + \frac{1}{4\varepsilon} \|f\|_0^2 + \varepsilon \|u\|_0^2, \end{aligned} \quad (11)$$

где $c = \min_{1 \leq k \leq p} c_k$.

Суммы, стоящие в правой части неравенства (11), оценим следующим образом

$$\begin{aligned} \mu_{-k} u(x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_p, t) \leq & \frac{1}{2} \mu_{-k}^2 + \frac{1}{2} u^2(x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_p, t) \leq \\ \leq & \frac{1}{2} \mu_{-k}^2 + \frac{1}{2} \left[\varepsilon \|u_{x_k}\|_{L_2(0, l_k)}^2 + c_\varepsilon \|u\|_{L_2(0, l_k)}^2 \right], \end{aligned}$$

где $\varepsilon = const > 0$, $c_\varepsilon = const$, зависящая от ε .

Откуда имеем

$$\begin{aligned} \int_{G'} \mu_{-k} u(x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_p, t) dx' \leq & \frac{1}{2} \int_{G'} \mu_{-k}^2 dx' + \frac{1}{2} \int_{G'} \|u_{x_k}\|_{L_2(0, l_k)}^2 dx' + \\ & + \frac{c_\varepsilon}{2} \int_{G'} \|u\|_{L_2(0, l_k)}^2 dx' \leq \frac{1}{2l_k} \int_G \mu_{-k}^2 dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_G u^2 dx + \frac{c_\varepsilon}{2} \int_G u^2 dx. \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогично, оценим

$$\int_{G'} \mu_{+k} u(x_1, \dots, x_{k-1}, l_k, x_{k+1}, \dots, x_p, t) dx' \leq \frac{1}{2l_k} \int_G \mu_{+k}^2 dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_G u_{x_k}^2 dx + \frac{c_\varepsilon}{2} \int_G u^2 dx \quad (13)$$

Сложим (12) и (13) и просуммируем полученное соотношение по k от 1 до p

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p \int_{G'} \mu_{-k} u(x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_p, t) dx' + \sum_{k=1}^p \int_{G'} \mu_{+k} u(x_1, \dots, x_{k-1}, l_k, x_{k+1}, \dots, x_p, t) dx' \leq \\ \leq \sum_{k=1}^p \frac{1}{2l_k} \int_G (\mu_{-k}^2 + \mu_{+k}^2) dx + \varepsilon \|u_x\|_0^2 + c_\varepsilon P \|u\|_0^2. \end{aligned}$$

Подставляя полученное неравенство в тождество (11), с учетом положительности оператора дробного дифференцирования, получим

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u\|_0^2 + \nu_1 \|u_x\|_0^2 + \nu_2 \|u\|_0^2 \leq \frac{1}{4\varepsilon} \|f\|_0^2 + \sum_{k=1}^p \frac{1}{2l_k} (\|\mu_{-k}\|_0^2 + \|\mu_{+k}\|_0^2), \quad (14)$$



где

$$v_1 = c - \varepsilon, \quad v_2 = m - (\varepsilon + c_\varepsilon p)$$

Проинтегрируем полученное в результате неравенство (14) от 0 до t

$$\|u(x, t)\|_0^2 + 2v_1 \|u_x\|_{2, Q_t}^2 + 2v_2 \|u\|_{2, Q_t}^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|_{2, Q_t}^2 + \sum_{k=1}^p \frac{1}{l_k} (\|\mu_{-k}\|_{2, Q_t}^2 + \|\mu_{+k}\|_{2, Q_t}^2)$$

или

$$\|u\|_{2, Q_t}^2 + \|u_x\|_{2, Q_t}^2 + \|u_x\|_0^2 \leq M(t) \left(\|f\|_{2, Q_t}^2 + \int_0^t (\mu_{-k}^2(\tau) + \mu_{+k}^2(\tau)) d\tau \right)$$

Из этой априорной оценки следует единственность решения третьей краевой задачи (3), (8), (9).

Заключение

В работе исследованы краевые задачи первого и третьего рода для модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной Римана-Лиувилля в многомерной области. С помощью энергетических неравенств получены априорные оценки для решений рассматриваемых задач.

Список литературы

1. Керэфов М.А. Краевые задачи для модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Нальчик, 2000. – 75 с.
2. Кочубей А.Н. Диффузия дробного порядка // Дифференц. уравнения, 1990. Т. 26, №4. С. 660–670.
3. Кочубей А.Н. Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения, 1989. Т. 25, №8. С. 1359–1368.
4. Кумыкова С.К. Об одной краевой задаче для уравнения $\text{sign}|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0$ // Дифференц. уравнения, 1976. Т. 12, №1. С. 79–88.
5. Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2000. – 299 с.
6. Шогенов В.Х., Кумыкова С.К., Шхануков-Лафишев М.Х. Обобщенное уравнение переноса и дробные производные // Доклады АМАН, 1996. Т. 2, №6. С. 43–45.
7. Шхануков М.Х. Исследование краевых задач для уравнения третьего порядка методом функции Римана // Сообщение АН ГССР, 1983. С. 241–246.
8. Шхануков М.Х. Об одном методе решения краевых задачах для уравнения третьего порядка // ДАН СССР, 1982. Т. 265, №6. С. 1327–1330.
9. Шхануков М.Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференц. уравнения, 1982. Т. 18, №4. С. 689–699.
10. Янггарбер В.А. О смешанной задаче для модифицированного уравнения влагопереноса // ЖПМиМФ, 1967. №1. С. 247–254.

References

1. Kerefov M.A. Boundary Value Problems for moisture modified equation with fractional derivative with respect to time: Dis. ... Cand. Sci. Sciences. – Nalchik, 2000. – 75 p.
2. Kochubei A.N. Diffusion fractional // Differ. equation. 1990. V. 26. №4. Pp 660-670.
3. Kochubei A.N. The Cauchy problem for evolution equations of fractional order // Differ. equation. 1989. Vol. 25. №8. Pp 1359-1368.
4. Kumyikova S.K. On a boundary problem for the equation // Differ. Equation, 1976. V. 12. №1. Pp 79-88.



5. Nahushev A.M. Elements of fractional calculus and their application. – Nalchik Univ KBSC RAS, 2000. – 299 p.
6. Shogenov V.H., Kumykova SK Shhanukov-Lafishev MH Generalized transport equations and fractional // Reports of AMAN, 1996. Vol. 2. №6. Pp 43-45.
7. Shhanukov M.H. Investigation of boundary problems for an equation of the third order by the Riemann function // Message Academy of the GSPC, 1983. Pp 241–246.
8. Shhanukov M.H. On a method of solving boundary value problems for a third-order equation // Dokl, 1982. Vol. 265, №6. Pp 1327-1330.
9. Shhanukov M.H. On some boundary value problems for the equations of the third poryadka. occurring in modeling of fluid flow in porous media // Differ. equation, 1982. V. 18. №4. Pp 689-699.
10. Yangarber V.A. On a mixed problem for the modified equation // ZhPMiMF moisture, 1967. №1. Pp 247–254.



УДК 517.9

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS CONTINUITY SOLUTIONS SYSTEMS OF LINEAR VOLTERRA EQUATIONS WITH PARTIAL INTEGRALS

А.С. Калитвин, В.А. Калитвин, Н.И. Трусова
A.S. Kalitvin, V.A. Kalitvin, N.I. Trusova

*Липецкий государственный педагогический университет,
 Россия, 398020, г. Липецк, ул. Ленина, д. 42
 Lipetsk State Pedagogical University, 42, Lenina St, Lipetsk, 398020, Russia
 E-mail: kalitvinas@mail.ru; kalitvin@mail.ru; trusova.nat@gmail.com*

Ключевые слова: системы интегральных уравнений, уравнения Вольтерра, частные интегралы, существование и единственность решений

Key words: systems of integral equations, Volterra equations, partial integrals, existence and uniqueness solutions

Аннотация. Доказывается существование и единственность непрерывного решения системы линейных интегральных уравнений с частными интегралами, с частными интегралами и ядрами типа потенциала, с частными дробными интегралами.

Resume. The existence and uniqueness continuity solution of system of linear integral equations with partial integrals, with partial integrals and potential type kernels, with partial fractional integrals is proved.

Введение

В работе доказывается существование и единственность непрерывного решения системы линейных уравнений с частными интегралами следующего вида:

$$\begin{aligned}
 x_i(t, s) = & \sum_{j=1}^n \left[\int_a^t l_{ij}(t, s, \tau) x_j(\tau, s) d\tau + \int_c^s m_{ij}(t, s, \sigma) x_j(t, \sigma) d\sigma + \right. \\
 & \left. + \int_a^t \int_c^d n_{ij}(t, s, \tau, \sigma) x_j(\tau, \sigma) d\tau d\sigma \right] + f_i(t, s), i = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Предполагается, что $t \in [a, b], s \in [c, d]$, $l_{ij}(t, s, \tau)$, $m_{ij}(t, s, \sigma)$, $n_{ij}(t, s, \tau, \sigma)$ и $f_i(t, s)$ — заданные на $D \times [a, t]$, $D \times [c, s]$, $D \times [a, t] \times [c, d]$ и D соответственно функции, где $D = [a, b] \times [c, d]$, а интегралы здесь и далее понимаются в смысле Лебега.

Аналогичные вопросы рассматриваются для системы уравнений (1) с ядрами типа потенциала и с дробными частными интегралами.

Отметим, что к системам вида (1) с $m_{ij}(t, s, \sigma) \equiv 0$ ($i, j = 1, \dots, n$) приводятся системы линейных интегро-дифференциальных уравнений Барбашина, частным случаем которых является система линейных интегро-дифференциальных уравнений теории систем с существенно рапределенными параметрами [1,2].

Существование и единственность решения системы (1)

Рассмотрим систему (1) линейных интегральных уравнений Вольтерра с частными интегралами.

Пусть $C(D)$ — пространство непрерывных на $D = [a, b] \times [c, d]$ функций с супремум нормой, $A = C(L^1(\Omega))$ — пространство непрерывных на D функций $a(t, s, \omega)$ со значениями в $L^1(\Omega)$, где $\Omega \in \{[a, b], [c, d], D\}$, и нормой



$$\|a\|_A = \sup_{(t,s) \in D} \int_{\Omega} |a(t, s, \omega)| d\omega,$$

$C'_i(D)$ – пространство функций $y \in C(D)$, для которых $y'_i \in C(D)$, с нормой

$$\|y\|_{C'_i(D)} = \max_{(t,s) \in D} (|y(t, s)| + |y'_i(t, s)|).$$

Хорошо известно, что пространства $C(D)$, A и $C'_i(D)$ с заданными нормами являются банаховыми пространствами.

Через $C_n(D)$, $C_n^1(D)$ обозначим пространство вектор – функций

$$x(t, s) = (x_1(t, s), \dots, x_n(t, s)),$$

где $x_i \in C(D)$, $x_i \in C^1_i(D)$, соответственно. $C_n(D)$ и $C_n^1(D)$ – банаховы пространства с нормами

$$\|x\|_{C_n(D)} = \sum_{i=1}^n \|x_i\|_{C(D)} \text{ и } \|x\|_{C_n^1(D)} = \sum_{i=1}^n \|x_i\|_{C^1_i(D)}.$$

Банаховы пространства $C^1_s(D)$, $C^{1_{ns}}(D)$ определяются аналогично. Через $C^1(D)$ обозначим пространство непрерывно дифференцируемых на D функций, а через $C_n^1(D)$ – пространство вектор-функций

$$x(t, s) = (x_1(t, s), \dots, x_n(t, s)),$$

где $x_i \in C^1(D)$. $C^1(D)$ и $C_n^1(D)$ – банаховы пространства.

Система уравнений (1) допускает представление в виде системы

$$x(t, s) = (L + M + N)x(t, s) + f(t, s), \tag{2}$$

где $x(t, s) = (x_1(t, s), \dots, x_n(t, s))$, $f(t, s) = (f_1(t, s), \dots, f_n(t, s))$,

$$L = (L_{ij})_{i,j=1}^n, M = (M_{ij})_{i,j=1}^n, N = (N_{ij})_{i,j=1}^n,$$

а операторы L_{ij}, M_{ij}, N_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) определяются равенствами

$$(L_{ij}x_j)(t, s) = \int_a^t l_{ij}(t, s, \tau)x_j(\tau, s)d\tau, \tag{3}$$

$$(M_{ij}x_j)(t, s) = \int_c^s m_{ij}(t, s, \sigma)x_j(t, \sigma)d\sigma, \tag{4}$$

$$(N_{ij}x_j)(t, s) = \int_a^t \int_c^d n_{ij}(t, s, \tau, \sigma)x_j(\tau, \sigma)d\tau d\sigma. \tag{5}$$

Будем предполагать, что $l_{ij} \in C(L^1([a, b]))$, $m_{ij} \in C(L^1([c, d]))$, $n_{ij} \in C(L^1(D))$, $i, j = 1, \dots, n$.

Система уравнений (2) эквивалентно системе уравнений

$$(I - L)(I - M)x(t, s) = (LM + N)x(t, s) + f(t, s). \tag{6}$$

Покажем, что спектральный радиус оператора L , действующего в $C_n(D)$, равен нулю.



Так как $l_{ij} \in C(L^1([a, b]))$ ($i, j = 1, \dots, n$), то спектральный радиус оператора L_{ij} , непрерывного в $C(D)$, равен нулю: $r(L_{ij}) = 0$ ($i, j = 1, \dots, n$), а композиция операторов L_{ij} и L_{pq} является частично интегральным оператором с ядром из $C(L^1([a, b]))$ [3]. Следовательно, спектральный радиус этой композиции равен нулю.

Рассмотрим систему уравнений

$$\lambda x(t, s) = (Lx)(t, s) + f(t, s), \quad (7)$$

где комплексное число $\lambda \neq 0$. Для простоты считаем в (7) $\lambda = 1$.

В силу равенства $r(L_{11}) = 0$ из уравнения

$$x_1(t, s) = \sum_{j=1}^n \int_a^t l_{ij}(t, s, \tau) x_j(\tau, s) d\tau + f_1(t, s)$$

находим $x_1(t, s)$. Подставляя $x_1(t, s)$ в остальные уравнения системы (7), получим систему с неизвестными функциями $x_2(t, s), \dots, x_n(t, s)$. Учитывая равенство нулю спектрального радиуса оператора, действующего на $x_2(t, s)$ во втором уравнении, находим $x_2(t, s)$. Продолжая этот процесс, получим частично интегральное уравнение $x_n(t, s) = (Vx_n)(t, s) + h(t, s)$, где V — непрерывный в $C(D)$ частично интегральный оператор с $r(V) = 0$, а h — некоторая функция из $C(D)$. Из этого уравнения находим $x_n(t, s)$. Подставляя $x_n(t, s)$ в предыдущее уравнение, получим $x_{n-1}(t, s)$. Продолжая эту процедуру, найдем $x_1(t, s), \dots, x_n(t, s)$. Таким образом, при любых $\lambda \neq 0$ и $f \in C_n(D)$ система уравнений (7) имеет единственное решение в $C_n(D)$. Следовательно, $r(L) = 0$.

Аналогично доказывается, что $r(M) = 0$.

Тогда в $C_n(D)$ существуют ограниченные обратные операторы $(I - L)^{-1}$ и $(I - M)^{-1}$. Аналогично [3,4] доказывается, что эти операторы могут быть записаны в виде

$$(I - L)^{-1} = I + (P_{ij})_{ij=1}^n, \quad (I - M)^{-1} = I + (Q_{ij})_{ij=1}^n, \quad (8)$$

где P_{ij} и Q_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) — частично интегральные операторы, определяемые равенствами

$$(P_{ij}x_j)(t, s) = \int_a^t p_{ij}(t, s, \tau) x_j(\tau, s) d\tau, \quad (Q_{ij}x_j)(t, s) = \int_c^s q_{ij}(t, s, \sigma) x_j(t, \sigma) d\sigma$$

с ядрами $p_{ij} \in C(L^1([a, b]))$ и $q_{ij} \in C(L^1([c, d]))$.

Применяя к обеим частям системы уравнений (6) оператор $(I - M)^{-1}(I - L)^{-1}$ и учитывая равенства (8), получим эквивалентную систему уравнений

$$x(t, s) = \int_a^t \int_c^d r(t, s, \tau, \sigma) x(\tau, \sigma) d\tau d\sigma + e(t, s) \equiv (Rx)(t, s) + e(t, s), \quad (9)$$

где $e = (I - M)^{-1}(I - L)^{-1}f \in C(D)$, а $r(t, s, \tau, \sigma) = (r_{ij}(t, s, \tau, \sigma))_{i,j=1}^n$ с некоторыми функциями $r_{ij}(t, s, \tau, \sigma) \in C(L^1(D))$.



Аналогично доказательству равенства $r(L) = 0$, доказывается равенство $r(R) = 0$. Следовательно, система уравнений (9) имеет единственное решение в $C_n(D)$.

Таким образом, доказана

Теорема 1. Если функции $l_{ij} \in C(L^1([a, b]))$, $m_{ij} \in C(L^1([c, d]))$, $n_{ij} \in C(L^1(D))$ ($i, j = 1, \dots, n$), то для любой вектор-функции $f \in C_n(D)$ система (1) линейных интегральных уравнений с частными интегралами имеет единственное решение в $C_n(D)$.

Однозначная разрешимость систем с ядрами типа потенциала и с дробными частными интегралами

Из приведенных рассуждений видно, что в условии теоремы 1 $r(L) = r(M) = r(N) = r(L + M + N) = 0$. Поэтому единственное решение системы (1) может быть найдено методом последовательных приближений при любом начальном приближении $x_0 \in C_n(D)$. С учетом (2) последовательные приближения определяем равенствами

$$x_{m+1} = (L + M + N)x_m + f, \quad x_0 = f, \quad m = 0, 1, \dots \quad (10)$$

Из (10) имеем

$$x = (R_L + R_M + R_N)f + f,$$

где

$$R_L = \sum_{m=1}^{\infty} L^m, \quad R_M = \sum_{m=1}^{\infty} M^m, \quad R_N = \sum_{m=1}^{\infty} (L + M + N)^m - R_L - R_M.$$

Аналогично [3,4] доказывается, что операторы R_L, R_M и R_N допускают представления

$$R_L = (R_{ij}^{(L)})_{i,j=1}^n, \quad R_M = (R_{ij}^{(M)})_{i,j=1}^n, \quad R_N = (R_{ij}^{(N)})_{i,j=1}^n,$$

где $R_{ij}^{(L)}, R_{ij}^{(M)}, R_{ij}^{(N)}$ ($i, j = 1, \dots, n$) — операторы, определяемые равенствами

$$(R_{ij}^{(L)} y)(t, s) = \int_a^t r_{ij}^{(L)}(t, s, \tau) y(\tau, s) d\tau, \quad (R_{ij}^{(M)} y)(t, s) = \int_c^s r_{ij}^{(M)}(t, s, \sigma) y(t, \sigma) d\sigma,$$

$$(R_{ij}^{(N)} y)(t, s) = \int_a^t \int_c^s \varphi(t, s, \tau, \sigma) y(\tau, \sigma) d\tau d\sigma + \int_a^t \int_c^d \psi(t, s, \tau, \sigma) y(\tau, \sigma) d\tau d\sigma,$$

в которых $y \in C(D)$, $r_{ij}^{(L)} \in C(L^1([a, b]))$, $r_{ij}^{(M)} \in C(L^1([c, d]))$, $\varphi, \psi \in C(L^1(D))$.

Так как непрерывные функции $l_{ij} \in C(L^1([a, b]))$, $m_{ij} \in C(L^1([c, d]))$, $n_{ij} \in C(L^1(D))$ ($i, j = 1, \dots, n$) то в силу теоремы 1 система уравнений (1) с непрерывными ядрами имеет единственное решение в $C_n(D)$ при любой вектор-функции $f \in C_n(D)$.

Функции

$$l_{ij}(t, s, \tau) = \frac{l_{ij}^{(0)}(t, s, \tau)}{|t - \tau|^{\alpha_{ij}}}, \quad m_{ij}(t, s, \sigma) = \frac{m_{ij}^{(0)}(t, s, \sigma)}{|s - \sigma|^{\beta_{ij}}},$$



$$n_{ij}(t, s, \tau, \sigma) = \frac{n_{ij}^{(0)}(t, s, \tau, \sigma)}{(|t - \tau|^2 + |s - \sigma|^2)^{\gamma_{ij}}}, \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

где $l_{ij}^{(0)}, m_{ij}^{(0)}, n_{ij}^{(0)}$, — непрерывные функции, $0 < \alpha_{ij}, \beta_{ij} < 1$, $0 < \gamma_{ij} < 2$, назовем ядрами типа потенциала. Ядра типа потенциала $l_{ij} \in C(L^1([a, b]))$, $m_{ij} \in C(L^1([c, d]))$, $n_{ij} \in C(L^1(D))$ ($i, j = 1, \dots, n$) [3,4].

Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. Система уравнений (1) с ядрами типа потенциала имеет единственное решение в $C_n(D)$ для любой вектор-функции $f \in C_n(D)$.

Частным случаем системы уравнений (1) является система линейных интегральных уравнений (1) с дробными частными интегралами, где

$$l_{ij}(t, s, \tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_{ij})(t - \tau)^{\alpha_{ij}}}, \quad m_{ij}(t, s, \sigma) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_{ij})(s - \sigma)^{\beta_{ij}}},$$

$$n_{ij}(t, s, \tau, \sigma) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_{ij})(t - \tau)^2 + (s - \sigma)^2)^{\gamma_{ij}}}, \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

где $0 < \alpha_{ij}, \beta_{ij} < 1$, $0 < \gamma_{ij} < 2$, $i, j = 1, \dots, n$, а через $\Gamma(z)$ обозначена гамма-функция.

Эти ядра удовлетворяют условию теоремы 2. Поэтому система уравнений (1) с дробными частными интегралами имеет при любой вектор-функции $f \in C_n(D)$ единственное решение в $C_n(D)$.

Благодарности. Работа поддержана Минобрнауки России (задание № 2015/351, НИР № 1815).

Список литературы

1. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. — 560 p.
2. Brack G. Systems with substantially distributed parameters// Math. Res, 1985. V. 27. Pp. 421-424.
3. Калитвин А.С., Калитвин В.А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра – Фредгольма с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ, 2006. — 177 с.
4. Калитвин А.С., Фролова Е.В. Линейные уравнения с частными интегралами. С-теория. Липецк: ЛГПУ, 2004. — 195 с.

References

1. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. 560 pp.
2. Brack G. Systems with substantially distributed parameters// Math. Res, 1985. V. 27. Pp. 421-424.
3. Kalitvin A.S., Kalitvin V.A. Integral equations of Volterra and Volterra-Fredholm with partial integrals. Lipetsk: LGPU, 2006. 177 pp.
4. Kalitvin A.S., Frolova E.V. Linear equations with partial integrals. C-theory. Lipetsk: LGPU, 2004. 195 pp.

УДК 517.9

**ДВЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
БАРБАШИНА С ДРОБНОЙ ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ**

**TWO PROBLEMS FOR NONLINEAR BARBASHIN INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS
WITH FRACTIONAL PARTIAL DERIVATIVE**

**А.С. Калитвин, В.А. Калитвин
A.S. Kalitvin, V.A. Kalitvin**

*Липецкий государственный педагогический университет,
Россия, 398020, г. Липецк, ул. Ленина, д. 42
Lipetsk State Pedagogical University, 42, Lenina St, Lipetsk, 398020, Russia
E-mail: kalitvinas@mail.ru; kalitvin@mail.ru*

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, дробная частная производная, интегральное уравнение

Key words: integro-differential equation, fractional partial derivative, integral equation

Аннотация. Получены условия существования и единственности решения весовой задачи типа Коши и задачи Коши для нелинейных интегро – дифференциальных уравнений Барбашина с дробной частной производной в смысле Римана-Лиувилля и в смысле Капуто.

Resume. The existence and uniqueness conditions of solution of weight Cauchy type problem and of Cauchy problem for nonlinear Barbashin integro-differential equations with fractional partial derivative in Riemann-Liouville and Caputo sense are obtained.

Введение и постановка задачи

Будем рассматривать нелинейное интегро-дифференциальное уравнение

$$(D_{a+,t}^\alpha x)(t, s) = c(t, s, x(t, s)) + \int_c^d m(t, s, \sigma, x(t, \sigma)) d\sigma + f(t, s) \quad (1)$$

с левосторонней дробной частной производной по t порядка α в смысле Римана-Лиувилля, где $0 < \alpha \leq 1$, $(t, s) \in D = [a, b] \times [c, d]$, $c(t, s, u)$, $f(t, s)$ и $m(t, s, \sigma, u)$ – заданные и непрерывные на $F = D \times (-\infty, +\infty)$, D и $G = D \times [c, d] \times (-\infty, +\infty)$ соответственно функции, а интеграл понимается в смысле Лебега.

При аналогичных предположениях о заданных функциях рассматривается нелинейное интегро-дифференциальное уравнение

$$({}^C D_{a+,t}^\alpha x)(t, s) = c(t, s, x(t, s)) + \int_c^d m(t, s, \sigma, x(t, \sigma)) d\sigma + f(t, s) \quad (2)$$

с левосторонней дробной частной производной по t порядка α в смысле Капуто, где $0 < \alpha \leq 1$.

При $\alpha = 1$ левосторонние дробные частные производные в левой части уравнений (1) и (2) совпадают с обычной частной производной по t функции $x(t, s)$, если $x'_t(t, s)$ существует, а сами уравнения совпадают с нелинейным интегро-дифференциальным уравнением Барбашина (ИДУБ)

$$\frac{\partial x(t, s)}{\partial t} = c(t, s, x(t, s)) + \int_c^d m(t, s, \sigma, x(t, \sigma)) d\sigma + f(t, s). \quad (3)$$

В связи с этим нелинейные уравнения (1) и (2), при $0 < \alpha < 1$, назовем нелинейными ИДУБ с дробной частной производной по t порядка α в смысле Римана-Лиувилля и Капуто



соответственно. При $c(t, s, u) \equiv c(t, s)u$, $m(t, s, \sigma, u) \equiv m(t, s, \sigma)u$ и $0 < \alpha < 1$ уравнения (1) и (2) являются линейными ИДУБ с дробной частной производной.

Основы теории начальных и краевых задач для линейных ИДУБ построены в [1]. При этом изучаемые задачи интерпретировались как начальные или двухточечные задачи для дифференциальных уравнений первого порядка в банаховых пространствах с решениями, понимаемыми в классическом смысле, или сводились к интегральным уравнениям.

Условия однозначной локальной разрешимости нелинейного ИДУБ (3) с $c(t, s, u) \equiv c(t, s)u$ и при заданном начальном условии

$$x(t_0, s) = \varphi(s) \quad (4)$$

приведены в [1]. При этом задача (3)/(4) интерпретируется как задача Коши

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad x(t_0) = \varphi(s) \quad (5)$$

в банаховом пространстве X , где вектор-функции $x(t)$ и $f(t)$ определяются равенствами $x(t) := x(t, s)$ и $f(t) := f(t, s)$, оператор-функция $A(t)$ имеет вид

$$A(t)y(s) = c(t, s)y(s) + \int_c^d m(t, s, \sigma, y(\sigma))d\sigma, \quad (6)$$

а производная $x'(t)$ понимается в смысле Фреше.

При применении метода интегральных уравнений задача (3)/(4) сводится к нелинейному интегральному уравнению

$$x(t, s) = (Bx)(t, s) + g(t, s), \quad (7)$$

где

$$(Bx)(t, s) = \int_{t_0}^t c(\tau, s, x(\tau, s))d\tau + \int_{t_0}^t \int_c^d m(\tau, s, \sigma, x(\tau, \sigma))d\sigma d\tau,$$

а

$$g(t, s) = \varphi(s) + \int_{t_0}^t f(\tau, s)d\tau.$$

Если теперь задача (3)/(4) эквивалентна в банаховом функциональном пространстве E уравнению (7), то единственное решение в E имеет и задача (3)/(4).

Метод интегральных уравнений позволяет свести изучение ИДУБ (1) и (2) с левосторонней дробной частной производной по t порядка α ($0 < \alpha < 1$) к нелинейным интегральным уравнениям Вольтерра с частными интегралами.

Дробные частные интегралы и производные

Пусть $D = [a, b] \times [c, d]$ — конечный прямоугольник, $C(D)$ — пространство непрерывных на D функций $f(t, s)$, $A_t C(D)$ — пространство непрерывных на D функций $f(t, s)$, абсолютно

непрерывных по $t \in [a, b]$ при каждом $s \in [c, d]$, $C(L^1)$ – пространство измеримых на D функций $g(t, s)$, которые непрерывны по $s \in [c, d]$ как функции со значениями в $L^1 = L^1([a, b])$, $C_\gamma(D)$ – множество непрерывных на $(a, b) \times [c, d]$ функций $x(t, s)$, для которых при некотором $\gamma > 0$ функция $(t - a)^\gamma x(t, s)$ принадлежит $C(D)$, а норма определяется равенством

$$\|x\| = \sup_{(t,s)} |(t - a)^\gamma x(t, s)|,$$

и пусть $C([c, d])$ – пространство непрерывных на отрезке $[c, d]$ функций.

Хорошо известно, что $C([c, d]), C(D), A_t C(D), C(L^1), C_\gamma(D)$ и $C(L^1)$ являются банаховыми пространствами.

При $\alpha > 0$ и $g \in C(L^1)$ левосторонний дробный частный интеграл по t Римана-Лиувилля порядка α определяется равенством

$$(I_{a+,t}^\alpha g)(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{g(\tau, s)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} d\tau, t > a, \tag{8}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма функция. Дробные частные интегралы определены для любой функции $g \in C(L^1)$ и обладают полугрупповым свойством: $I_{a+,t}^\alpha I_{a+,t}^\beta g = I_{a+,t}^{\alpha+\beta} g$.

Через $I_{a+,t}^\alpha(C(L^1))$, где $\alpha > 0$, обозначим множество функций $f(t, s)$, допускающих представление $f(t, s) = (I_{a+,t}^\alpha \varphi)(t, s)$, где $\varphi \in C(L^1)$.

Аналогично теореме 2.3 из [2], $f \in I_{a+,t}^\alpha(C(L^1))$ точно тогда, когда выполнены условия: $f_{1-\alpha} = I_{a+,t}^{1-\alpha} f \in A_t C(D), f_{1-\alpha}(a, s) = 0$.

Левосторонняя дробная частная производная по t Римана – Лиувилля порядка α ($0 < \alpha < 1$) функции $f(t, s)$, по определению, имеет вид

$$(D_{a+,t}^\alpha f)(t, s) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_a^t \frac{f(\tau, s)}{(t - \tau)^\alpha} d\tau, t > a. \tag{9}$$

Так же, как в [2, теорема 2.3, лемма 2.2], доказывается, что если $f \in A_t C(D)$ и $0 < \alpha < 1$, то при каждом $s \in [c, d]$ $(D_{a+,t}^\alpha f)(t, s)$ существует почти при всех $t \in [a, b]$ и допускает представление

$$(D_{a+,t}^\alpha f)(t, s) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(a, s)}{(t - a)^\alpha} + \int_a^t \frac{f'_t(\tau, s)}{(t - \tau)^\alpha} d\tau \right), \tag{10}$$



причем $D_{a+,t}^\alpha f \in C(L^1)$. Из (9) и (10) следует, что линейный оператор $D_{a+,t}^\alpha$ действует из $A_t C(D)$ в $C(L^1)$ и ограничен.

Связь между дробными частными интегралами и производными описывается следующими равенствами:

$$D_{a+,t}^\alpha I_{a+,t}^\alpha g = g; \quad (11)$$

$$I_{a+,t}^\alpha D_{a+,t}^\alpha f = f \quad (f \in I_{a+,t}^\alpha(C(L^1))); \quad (12)$$

$$(I_{a+,t}^\alpha D_{a+,t}^\alpha f)(t,s) = f(t,s) - \frac{f_{1-\alpha}(a,s)}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha-1}, \quad (13)$$

если $0 < \alpha < 1$, $f \in C(L^1)$ и $I_{a+,t}^{1-\alpha} f \in A_t C(D)$;

$$(I_{a+,t}^\alpha D_{a+,t}^\alpha g)(t,s) = g(t,s) - \frac{(I_{a+,t}^{1-\alpha} g)(a+,s)(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad (14)$$

если $g \in C(D_0)$ и $(I_{a+,t}^{1-\alpha} g)(t,s) \in C(D_0)$, где $D_0 = (a,b] \times [c,d]$.

Доказательство равенств (11)-(14) производится с применением схемы доказательства теоремы 2.4 из [2].

Дробная частная производная по t порядка α в смысле Капуто определяется равенством

$$({}^C D_{a+,t}^\alpha f)(t,s) = (D_{a+,t}^\alpha (f-g))(t,s), \text{ где } g(t,s) \equiv f(a,s).$$

Если $0 < \alpha < 1$ и $f \in A_t C(D)$, то аналогично [3, лемма 2.22] доказывается равенство

$$(I_{a+,t}^\alpha)({}^C D_{a+,t}^\alpha f)(t,s) = f(t,s) - f(a,s). \quad (15)$$

Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение Барбашина с дробной частной производной в смысле Римана-Лиувилля

Рассмотрим ИДУБ (1) с дробной частной производной по t порядка α в смысле Римана-Лиувилля, где $0 < \alpha \leq 1$, c, f, m — заданные непрерывные функции, а интеграл понимается в смысле Лебега. ИДУБ (1) с дополнительным условием

$$\lim_{t \rightarrow a+} (t-a)^{1-\alpha} x(t,s) = \varphi(s), \varphi \in C([c,d]), \quad (16)$$

назовем весовой задачей типа Коши. Под решением задачи (1)/(16) будем понимать функцию $x \in C_{1-\alpha}(D)$, удовлетворяющую уравнению (1) и весовому условию (16). Отметим, что при $\alpha = 1$

условие (16) имеет вид $x(a, s) = \varphi(s)$, а задача (1)/(16) является задачей Коши для ИДУБ (3) с начальным условием $x(a, s) = \varphi(s)$, если существует $x'_t(t, s)$.

Пусть $0 < \alpha < 1$ и x — решение задачи (1)/(16). Тогда при этом x ИДУБ (1) обращается в тождество. Применяя к обеим частям этого тождества дробный частный интеграл (8) и учитывая равенства (11)-(13) и (16), получим тождество

$$x(t, s) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{1}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \left(c(\tau, s, x(\tau, s)) + \int_c^d m(\tau, s, \sigma, x(\tau, \sigma)) d\sigma \right) d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau, s)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau + \varphi(s)(t-a)^{\alpha-1}. \quad (17)$$

Таким образом, при указанных условиях на функции c, m, f, φ решение x задачи (1)/(16) удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{c(\tau, s, x(\tau, s))}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \int_c^d \frac{m(\tau, s, \sigma, x(\tau, \sigma))}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\sigma d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau, s)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau + \varphi(s)(t-a)^{\alpha-1}, \quad (18)$$

под решением которого понимается функция $x \in C_\gamma(D)$, где $\gamma = 1 - \alpha$, удовлетворяющая уравнению (18). Отметим, что уравнение (18) можно рассматривать в $C_\gamma(D)$ при $\gamma = 1 - \alpha$, так как при $x \in C_\gamma(D)$ каждое слагаемое правой части этого уравнения принадлежит $C_\gamma(D)$.

Предположим теперь, что $x(t, s)$ — решение уравнения (18) в $C_{1-\alpha}(D)$. Тогда имеет место тождество (17). Применяя к обеим частям этого тождества дробную частную производную (9) и учитывая равенства (11)-(13) и $(D_{a+}^\alpha (t-a)^{\alpha-1})(x) = 0$ [3, с. 71], получим тождество

$$(D_{a+,t}^\alpha x)(t, s) \equiv c(t, s, x(t, s)) + \int_c^d m(t, s, \sigma, x(t, \sigma)) d\sigma + f(t, s),$$

причем $\lim_{t \rightarrow a+} (t-a)^{1-\alpha} x(t, s) = \varphi(s)$. Поэтому $x(t, s)$ — решение задачи (1)/(16) в $C_{1-\alpha}(D)$.

Пусть теперь $\alpha = 1$ и существует $x'_t(t, s)$. Тогда $C_{1-\alpha}(D) = C(D)$, а уравнение (1) с дополнительным условием (16) равносильно интегральному уравнению

$$x(t, s) = \int_a^t c(\tau, s, x(\tau, s)) d\tau + \int_a^t \int_c^d m(\tau, s, \sigma, x(\tau, \sigma)) d\sigma d\tau + \int_a^t f(\tau, s) d\tau + \varphi(s),$$

которое совпадает с уравнением (18) при $\alpha = 1$.

Следовательно, в $C_{1-\alpha}(D)$, где $0 < \alpha \leq 1$, задача (1)/(16) эквивалентна уравнению (18). Из приведенных рассуждений вытекает



Теорема 1. Пусть $0 < \alpha \leq 1$ и заданные функции c, f, m и φ непрерывны. Тогда в $C_{1-\alpha}(D)$ весовая задача типа Коши (1)/(16) эквивалентна интегральному уравнению (18).

Уравнение (18) запишем в виде $x = Vx + g$, где

$$(Vx)(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{c(\tau, s, x(\tau, s))}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \int_c^d \frac{m(\tau, s, \sigma, x(\tau, \sigma))}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\sigma d\tau, \quad (19)$$

а

$$g(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau, s)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau + \varphi(s)(t-a)^{\alpha-1}.$$

Как отмечено выше, в условии теоремы 1 оператор V действует в $C_{1-\alpha}(D)$, а функция $g \in C_{1-\alpha}(D)$.

Будем предполагать, что функции $c(\tau, s, u)$ и $m(\tau, s, \sigma, u)$, где $u \in (-\infty, +\infty)$, удовлетворяют условию Липшица:

$$\begin{aligned} |c(\tau, s, u) - c(\tau, s, v)| &\leq c_0(\tau, s) |u - v|, \\ |m(\tau, s, \sigma, u) - m(\tau, s, \sigma, v)| &\leq m_0(\tau, s, \sigma) |u - v|, \end{aligned} \quad (20)$$

где $c_0(\tau, s)$ и $m_0(\tau, s, \sigma)$ — непрерывные функции.

Через V_0 обозначим линейный оператор

$$(V_0x)(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{c_0(\tau, s)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} x(\tau, s) d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \int_c^d \frac{m_0(\tau, s, \sigma)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} x(\tau, \sigma) d\sigma d\tau. \quad (21)$$

Используя приведенные в [4-7] условия равенства нулю спектрального радиуса оператора Вольтерра с частными интегралами, которые могут быть применены к оператору (21), действующему в пространстве $C_{1-\alpha}(D)$, получаем, что для действующего в $C_{1-\alpha}(D)$ оператора V_0 спектральный радиус $r(V_0) = 0$. Поэтому интегральное уравнение

$$x = V_0x + g$$

имеет в пространстве $C_{1-\alpha}(D)$ единственное решение. В виду оценки

$$|Vx + g - Vy - g| \leq |V_0x + g - V_0y - g|$$

и обобщенного принципа сжимающих отображений [8] единственное решение в $C_{1-\alpha}(D)$ имеет и уравнение (18). В силу теоремы 1 единственное решение в $C_{1-\alpha}(D)$ имеет и задача (1)/(16). Таким образом, справедлива

Теорема 2. Пусть $0 < \alpha \leq 1$, заданные функции c, f, m, φ непрерывны и функции c и m удовлетворяют условию Липшица (20). Тогда весовая задача типа Коши (1)/(16) имеет единственное решение в $C_{1-\alpha}(D)$.

В заключение раздела отметим, что ИДУБ (1) рассматривалось при дополнительном условии на решение в точке a . Если же рассматривать дополнительное условие во внутренней точке интервала (a, b) , то при $0 < \alpha < 1$ ситуация становится совершенно иной. Уже в случае линейного ИДУБ (1) получается задача Коши, которая приводится к линейному интегральному уравнению с операторами Вольтерра и Фредгольма с частными интегралами. В общем случае заданных непрерывных функций c, m, f, φ такие уравнения не являются нетеровыми [4,5]. Поэтому утверждение теоремы 2 для уравнения (1) с дополнительным условием во внутренней точке не имеет места.

Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение Барбашина с дробной частной производной в смысле Капуто

Будем рассматривать нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (2) с левосторонней дробной частной производной по t порядка α в смысле Капуто, где $0 < \alpha \leq 1$. ИДУБ (2) с дополнительным условием

$$x(a, s) = \varphi(s) \tag{22}$$

назовем задачей Коши. Под решением задачи (2)/(22) будем понимать функцию $x \in A_t C(D)$, удовлетворяющую соотношениям (2)/(22).

Теорема 3. Пусть $0 < \alpha \leq 1$, заданные функции c, f, m и φ непрерывны. Тогда в $A_t C(D)$ задача Коши (2)/(22) эквивалентна нелинейному интегральному уравнению

$$\begin{aligned} x(t, s) = & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{c(\tau, s, x(\tau, s))}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \int_c^d \frac{m(\tau, s, \sigma, x(\tau, \sigma))}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\sigma d\tau + \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau, s)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau + \varphi(s). \end{aligned} \tag{23}$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1. К обеим частям уравнения (2) применяем дробный частный интеграл (8). С учетом (15) и (22) получаем интегральное уравнение (23), эквивалентное задаче Коши (2)/(22).

Теорема 4. Пусть $0 < \alpha \leq 1$, заданные функции c, f, m и φ непрерывны и функции c и m удовлетворяют условию Липшица (20). Тогда задача Коши (2)/(22) имеет единственное решение в $A_t C(D)$.

Доказательство. Непосредственно проверяется, что в условии теоремы каждое слагаемое правой части уравнения (23) принадлежит $A_t C(D)$. Поэтому оператор (19) действует из $C(D)$ в



$A_7C(D)$. Этот же оператор действует в $C(D)$ и, как показано выше, уравнение $x = Vx + g$ имеет единственное решение в $C(D)$. Следовательно, уравнение (23) имеет единственное решение $x \in C(D)$, которое принадлежит $A_7C(D)$ в силу того, что каждое слагаемое правой части уравнения (23) принадлежит $A_7C(D)$. Учитывая вложение $A_7C(D) \subset C(D)$, получаем, что x — единственное решение уравнения (23) в $A_7C(D)$. Тогда задача (2)/(22), эквивалентная в $A_7C(D)$ этому уравнению, имеет единственное решение в $A_7C(D)$. Теорема доказана.

Благодарности. Работа поддержана Минобрнауки России (задание № 2015/351, НИР № 1815).

Список литературы

1. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. — 560 p.
2. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
3. Kilbas A.A., Srivastava N.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam-Boston-Heidelberg-London-New York-Oxford-Paris-San Diego-Francisco-Singapur-Sydney-Tokio: Elsevier Inc., 2006. — 541 p.
4. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами. Воронеж: ЦЧКИ, 2000. — 252с.
5. Калитвин А.С., Калитвин В.А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра – Фредгольма с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ, 2006. — 177 с.
6. Калитвин А.С., Фролова Е.В. Линейные уравнения с частными интегралами. С-теория. Липецк: ЛГПУ, 2004. — 195 с.
7. Kalitvin A.S. Spectral properties of partial operators of Volterra and Volterra-Fredholm type// ZAA, 1998. V. 17. 2. Pp. 297-309.
8. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. — 456 с.

References

1. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. 560 pp.
2. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Integrals and derivatives of fractional degree and some their applications. Minsk: The Science and techniques, 1987. 688 pp.
3. Kilbas A.A., Srivastava N.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam-Boston-Heidelberg-London-New York-Oxford-Paris-San Diego-Francisco-Singapur-Sydney-Tokio: Elsevier Inc., 2006. 541 pp.
4. Kalitvin A.S. Linear operators with partial integrals. Voronezh: CHKI, 2000. 252 pp.
5. Kalitvin A.S., Kalitvin V.A. Integral equations of Volterra and Volterra-Fredholm with partial integrals. Lipetsk: LGPU, 2006. 177 pp.
6. Kalitvin A.S., Frolova E.V. Linear equations with partial integrals. C-theory. Lipetsk: LGPU, 2004. 195 pp.
7. Kalitvin A.S. Spectral properties of partial operators of Volterra and Volterra-Fredholm type// ZAA, 1998. V. 17. 2. Pp. 297-309.
8. Krasnosel'skij M.A., Vajnikko G.M., Zabrejko P.P., Rutitskij Ja.B., Sobolevskij P.E., Stetsenko V.Ja. Approximative solutions of operator equations. M.: The Science, 1969. 456 pp.

ФИЗИКА

УДК 533.72:532

О СКОРОСТИ ТЕРМОФОРЕЗА ТВЕРДОЙ УМЕРЕННО КРУПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ АЭРОЗОЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ С КОЭФФИЦИЕНТОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ РАДИАЛЬНОЙ КООРДИНАТЫ

ABOUT THE THERMOPHORESIS VELOCITY SOLID MODERATELY LARGE SPHERICAL AEROSOL PARTICLE WITH R OF THE THERMAL CONDUCTIVITY DEPENDING ON THE RADIAL COORDINATE

¹Е.Р. Шукин, ²Н.В. Малай, Э.Л. Шулиманова, ³А.А. Стукалов
E.R. Shchukin, N.V. Malay, Z.L. Shulimanova, A.A. Stukalov

¹Объединенный институт высоких температур РАН, Россия, Москва, ул. Ижорская, д. 13/19
The Leading Scientist of Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Science,
13/19 Izhora St, Moscow, Russia

²Белгородский национальный исследовательский университет, Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

³Автономная некоммерческая организация высшего образования «Белгородский университет кооперации, экономики и права», Россия, 308023, г. Белгород, ул. садовая, 116 а
Belgorod University of Cooperation, Economics and Law, 116 a Sadovaya St, Belgorod, 308023, Russia
E-mail: malay@bsu.edu.ru; evgrom@yandex.ru; zinaida110@yandex.ru; pochtovyk@gmail.com

Ключевые слова: термофорез аэрозольной частицы сферической формы
Key words: thermophoresis of an aerosol particle of the spherical form

Аннотация. В квазистационарном приближении при числах Рейнольдса много меньших единицы решена задача о термофоретическом движении в однокомпонентном газе твердой неоднородной умеренно крупной сферической аэрозольной частицы с коэффициентом теплопроводности, зависящим от радиальной координаты. Проведенный численный анализ показал, что зависимость коэффициента теплопроводности от радиальной координаты может оказать значительное влияние на скорость термофореза. При увеличении числа Кнудсена на термофоретическое движение неоднородной частицы все большее влияние оказывают поверхностные газокинетические эффекты, а влияние неоднородности теплофизических свойств уменьшается.

Resume. The problem of thermophoretic motion in one-component gas solid non-uniform moderately large spherical aerosol particles with a thermal conductivity that depends on the radial coordinate is solved in quasi-stationary approximation for small Reynolds. The numerical analysis has showed that the dependence of thermal conductivity on radial coordinate can have a significant impact on the thermophoresis velocity. Surface gas-kinetic effects are more influenced on the thermophoretic motion of non-uniform particles with the increase of the Knudsen number, and the influence of non-uniform thermophysical properties decreases.

Введение

В неоднородной по температуре газообразной среде на аэрозольные частицы действует термофоретическая сила [1-4]. Её появление обусловлено передачей частицам молекулами неоднородного газа нескомпенсированного импульса. Термофоретическая сила вызывает упорядоченное движение аэрозольных частиц относительно газообразной среды [1-4]. Когда термофоретическая сила становится равной по величине силе сопротивления газообразной среды движению частицы, то при этом частица начинает двигаться равномерно относительно центра инерции газообразной среды в месте нахождения частицы. Скорость этого движения частицы называют термофоретической [1-5].

Термофоретическая сила может ускорить образование вредных отложений из аэрозольных частиц на поверхностях тепло – и массообмена [5]. Её влияние нужно учитывать, например, при оценке движения частиц в зонах просветления аэрозолей [6] и в окрестности, вымывающих частицы, испаряющихся капель [7]. Термофоретическое движение частиц может быть



использовано при тонкой очистке газов [5] и нанесении, заданной толщины, покрытий из аэрозольных частиц [8].

Следует отметить, что величина термофоретических силы и скорости термофореза крупных и умеренно крупных аэрозольных частиц, в отличие от малых по числу Кнудсена частиц [9], сильно зависит от их коэффициентов теплопроводности. В связи с этим как теоретический, так и практический интерес представляет изучение особенностей влияния на термофоретическое движение крупных и умеренно крупных частиц их теплофизических свойств.

В состав естественных и антропогенных аэрозолей могут входить твёрдые крупные и умеренно крупные структурно неоднородные частицы [1,4,10,11]. Коэффициенты теплопроводности таких частиц могут сильно зависеть от пространственных координат точек частиц. Этого вида частицы могут образовываться, соответственно, при протекании природных (например, вулканических [10]) и промышленных (например, металлургических [11]) процессов. Характер структурной неоднородности частиц определяется физико-химическими условиями их получения. Неоднородные частицы могут быть получены, в частности, из пористых композиционных материалов, например, типа сибунита, пористого оксид алюминия. Но, до настоящего времени, достаточно полно, закономерности термофоретического движения твёрдых крупных и умеренно крупных частиц были изучены только в случае однородных сферических частиц с постоянными коэффициентами теплопроводности, не зависящими от координат точек частиц [2-4,12]. Приведённые в настоящей работе формулы позволяют непосредственно оценивать величину термофоретических силы и скорости крупных и умеренно крупных твёрдых сферических частиц с коэффициентами теплопроводности, зависящими от радиальной координаты. С помощью формулы для скорости термофореза была исследована зависимость скорости термофореза твёрдых крупных и умеренно крупных сферических частиц от коэффициентов теплопроводности при их степенной и экспоненциальной зависимости от радиальной координаты. К крупным аэрозольным частицам относят частицы с числом Кнудсена $Kn \leq 0,01$, а к умеренно крупным – частицы с $0,01 \leq Kn \leq 0,3$ [2-4]. В случае сферических частиц $Kn = \lambda / R$, где λ – средняя длина свободного пробега газовых молекул, R – радиус частиц [2-4].

Постановка задачи

В неоднородном по температуре однокомпонентном газе в поле внешнего градиента температуры ∇T_{∞} находится твёрдая умеренно крупная сферическая частица с радиусом R . При этом газ, взаимодействуя с поверхностью частицы, начинает двигаться вдоль её поверхности в направлении возрастания температуры. Это явление называют тепловым скольжением [3]. Тепловое скольжение вызывает появление термофоретической силы. Коэффициент теплопроводности частицы ε зависит от радиальной координаты r . Этот коэффициент и его производная являются непрерывно дифференцируемыми функциями. На величину градиента температуры наложено ограничение: $R|\nabla T_{\infty}|/T_{\infty} \ll 1$ [2,3]. В силу малости времён релаксации температурного и гидродинамических полей системы газ – частица, описание процесса термофоретического движения проводится в квазистационарном приближении [2,3,12,13]. В связи с тем, что у частицы число $Kn \leq 0,3$, решение задачи проводится с помощью гидродинамического метода [2,3,12,13,14]. Относительные перепады температуры в окрестности частицы достаточно

малы, чтобы газ можно было считать несжимаемым, а его плотность ρ_e и коэффициенты динамической вязкости μ_e и теплопроводности κ_e – постоянными величинами [2,3]. Движение частицы происходит при числах Рейнольдса $Re \ll 1$ и Пекле $Pe \ll 1$ [2-4]. При таких числах Рейнольдса и Пекле термофоретическое движение частиц происходит в реальных условиях [3,4]. Когда числа $Re \ll 1$ и $Pe \ll 1$, в уравнениях переноса импульса и тепла можно пренебречь конвективными членами [2-4,13,14] (т.е. не учитывать влияние движения газообразной среды на распределения в окрестности частицы температуры, давления и массовой скорости). При этом, решая гидродинамическим методом задачу о термофоретическом движении аэрозольной частицы, можно использовать уравнения Стокса и линеаризованные уравнения теплопереноса [2-4,13]. В связи со сферической формой частицы, решение задачи проводится в сферической системе координат, начало которой совпадает с центром частицы. Направление оси OZ совпадает с направлением внешнего градиента температуры. Определённая в такой системе координат скорость установившегося течения газа на бесконечности равна по величине скорости термофореза, но противоположна ей по направлению [2,3,12].

Термофоретические сила и скорость

При рассмотренных условиях распределения в системе газ – частица массовой скорости \vec{V} , давления P , температуры газа T_e , и температуры T частицы в сферической системе координат описываются следующей системой уравнений переноса [14]:

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{2V_r}{r} + ctg\theta \frac{V_\theta}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \mu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (V_r \cdot r) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + ctg\theta \frac{1}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{2V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} ctg\theta V_\theta \right\},$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = \mu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (V_\theta \cdot r) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + ctg\theta \frac{1}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \right\}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T_e}{\partial \theta} \right) = 0,$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \varepsilon \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\varepsilon \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = 0,$$

где r и θ – сферические координаты [13,14]; V_r, V_θ – компоненты скорости газа \vec{V} в сферической системе координат. В случае умеренно крупных частиц систему уравнений (1) нужно решать совместно с граничными условиями (2) – (6) [3,12]:

$$V_r|_{r=R} = c_v Kn \frac{v_e}{RT_{e\infty}} \left[\frac{\partial^2 T_e}{\partial \theta^2} + ctg\theta \frac{\partial T_e}{\partial \theta} \right] \Big|_{r=R}, \quad (2)$$

$$V_\theta|_{r=R} = c_m Kn R \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] + K_{TS}^{(0)} (1 + Kn\beta'_R) \frac{v_e}{RT_{e\infty}} \frac{\partial T_e}{\partial \theta} + K_{TS}^{(0)} Kn\beta_R \frac{v_e}{T_{e\infty}} \frac{\partial^2 T_e}{\partial r \partial \theta} - K_{TS}^{(0)} Kn\beta_B \frac{v_e}{2T_{e\infty}} R \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial T_e}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T_e}{\partial \theta \partial r} \right] \Big|_{r=R} \quad (3)$$



$$T_e - T \Big|_{r=R} = K_T^{(T)} Kn R \frac{\partial T_e}{\partial r} \Big|_{r=R}, \quad (4)$$

$$-\kappa_e \frac{\partial T_e}{\partial r} + \varepsilon \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = -c_q \kappa_e Kn \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 T_e}{\partial \theta^2} + ctg\theta \frac{\partial T_e}{\partial \theta} \right) \Big|_{r=R}, \quad (5)$$

$$V_r \Big|_{r \rightarrow \infty} = V_{\infty} \cos \theta, \quad V_\theta \Big|_{r \rightarrow \infty} = -V_{\infty} \sin \theta, \quad P \Big|_{r \rightarrow \infty} = P_\infty, \quad T_e \Big|_{r \rightarrow \infty} = T_{e\infty} + r \left| \vec{\nabla} T_{e\infty} \right| \cos \theta, \quad (6)$$

где $\nu_e = \mu_e / \rho_e$ – коэффициент кинематической вязкости; $T_{e\infty}$ – температура газа в месте нахождения частицы. Граничные условия на поверхности частицы (2)-(5) записаны с учётом всех эффектов, линейных по числу Кнудсена [3]. Входящие в (2)-(5) газокинетические коэффициенты $K_{TS}^{(0)}, c_m$ – коэффициенты теплового и изотермического скольжений; $\beta_R, \beta_B, \beta_B$ – поправки на кривизну и барнеттовское скольжение; c_q, c_V – коэффициенты потоков тепла и среднемассового переноса, растекающихся в слое Кнудсена; коэффициент $K_T^{(T)}$ – коэффициент скачка температуры [3]. Выражения для газокинетических коэффициентов $K_{TS}^{(0)}, c_m, c_q, c_V, \beta_R, \beta_B, \beta_B$ приведены в [3,12], где они получены в ходе решения в слое Кнудсена уравнения Больцмана. При коэффициентах аккомодации тангенциальной проекции импульса и энергии молекул равных единице, значения газокинетических коэффициентов, приведённые в [3], равны:

$$c_V = 0,971, c_m = 1,131, K_{TS}^{(0)} = 1,161, \beta_R = -0,701, \beta_B = 3,731, \beta_B = 3,651, K_T^{(T)} = 2,179, \\ c_q = 0,548.$$

Условие (2) – условие непротекания молекул через поверхность частицы, записанное с учётом растекания молекул вдоль слоя Кнудсена; условие (3) учитывает изотермическое и тепловое скольжения; условия (4) и (5) учитывают скачок температуры и непрерывность теплового потока. В ходе решения граничной задачи (1)-(6) были получены сначала выражения для распределений T_e, T и затем \vec{v}, P . После этого, в результате интегрирования по поверхности частицы нормальной и касательной составляющей тензора напряжений [3,14], было получено выражение для действующей на частицу полной силы \vec{F}_p . Эта сила складывается из силы вязкого сопротивления \vec{F}_μ и термофоретической силы \vec{F}_T :

$$\vec{F}_p = \vec{F}_\mu + \vec{F}_T. \quad (7)$$

Входящие в (7) выражения для \vec{F}_μ и \vec{F}_T равны:

$$\vec{F}_\mu = -6\pi R \mu_e f_\mu \vec{U}_p, \quad \vec{F}_T = -6\pi R \mu_e f_T \frac{V_e}{T_{e\infty}} \nabla T_{e\infty}, \quad (8)$$

где

$$f_\mu = \frac{(1 + 2c_m Kn)}{(1 + 3c_m Kn)}, \quad (9)$$

$$f_T = 2K_{TS}^{(0)} \left\{ [1 + Kn(\beta_R + \beta_B)] - (1 + 6c_m Kn) c_V^* Kn \left[\kappa_e \varphi^{(S)} + \varepsilon^{(S)} K_T^{(T)} Kn \frac{d\varphi^{(S)}}{dy} \right] + \right. \\ \left. + Kn(\beta_R - \beta_B) \left[\varepsilon^{(S)} \frac{d\varphi^{(S)}}{dy} - 2\kappa_e c_q Kn \varphi^{(S)} \right] \right\} / (1 + 2c_m Kn) d_e, \quad (10)$$

$$d_e = \left[2\kappa_e(1 - c_q Kn)\varphi^{(S)} + \varepsilon^{(S)}(1 + 2K_T^{(T)} Kn) \frac{d\varphi^{(S)}}{dy} \right]. \quad (11)$$

В выражениях (10), (11) $\varepsilon^{(S)} = \varepsilon \Big|_{y=1}, \varphi^{(S)} = \varphi \Big|_{y=1}, \frac{d\varphi^{(S)}}{dy} = \frac{d\varphi}{dy} \Big|_{y=1}$. Функция φ зависящее от y , нерасходящееся при $y=0$, безразмерное частное решение уравнения

$$\varepsilon y^2 \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d}{dy}(\varepsilon y^2) \frac{d\varphi}{dy} - 2\varepsilon\varphi = 0. \quad (12)$$

В общем случае зависимость функций φ от y может быть найдена в ходе численного решения (12). В случае однородных частиц, когда $\varepsilon = \varepsilon^{(0)} = const$, функция $\varphi = y$. Уравнение (12), в некоторых случаях, имеет аналитическое решение и при зависящих от y коэффициентах ε . Например, при

$$\varepsilon = \varepsilon^{(0)} y^\gamma, -\infty < \gamma < \infty \text{ И } \varepsilon = \varepsilon^{(0)} \exp(\alpha y), -\infty < \alpha < \infty. \quad (13)$$

Функции φ при ε (13), соответственно, равны

$$\varphi = y^{\frac{-1-\gamma+\mu}{2}}, \mu = \sqrt{(1+\gamma)^2 + 8}; \quad (14)$$

$$\varphi = 3 \left[\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2}{y\alpha^2} + \frac{2}{y^2\alpha^3} \right) - \frac{2}{y^2\alpha^3} \exp(-\alpha y) \right]. \quad (15)$$

После приравнивания полной силы \vec{F}_p (7) нулю, приходим к следующей формуле для скорости термофореза:

$$\vec{U}_T = -f_T \frac{v_e}{T_{e\infty}} \nabla T_{e\infty}. \quad (16)$$

Анализ полученных результатов

В работе решена задача о термофорезе в однокомпонентном газе умеренно крупной твёрдой сферической аэрозольной частицы с коэффициентом теплопроводности, зависящим от радиальной координаты. При этом были получены формулы (8) и (16) для силы и скорости термофореза рассмотренной частицы. Эти формулы при известной зависимости функций φ от радиальной координаты позволяют непосредственно оценивать величину \vec{F}_T и \vec{U}_T и крупных ($Kn \leq 0,01$) и умеренно крупных сферических частиц. Эти оценки в случае умеренно крупных частиц можно проводить в связи с тем, что при решении задачи в граничных условиях на поверхности частицы были учтены все газокинетические эффекты, линейные по числу Кнудсена [3,12]. К ним, в частности, относится зависимость коэффициента теплового скольжения от кривизны поверхности, барнеттовских температурных напряжений, градиента температуры, растекания молекул вдоль слоя Кнудсена, обусловленного неоднородным распределением температуры [3]. При постоянном коэффициенте теплопроводности, формула (16) переходит в найденную ранее формулу для скорости термофореза твёрдой умеренно крупной однородной сферической аэрозольной частицы [3]. Формулы (14), (15) могут быть использованы, соответственно, при оценке величины силы и скорости термофореза частиц с большими и



малыми значениями коэффициента теплопроводности в центральной части частиц ($\varepsilon = \varepsilon^{(0)} y^\gamma$) и у их поверхности ($\varepsilon = \varepsilon^{(0)} \exp(\alpha y)$).

Из формул (8) и (16) следует, что зависимость термофоретической силы и скорости твёрдых крупных и умеренно крупных сферических частиц от их коэффициента теплопроводности определяется скалярным безразмерным коэффициентом $f_T = \left| \bar{U}_T \right| \left| \frac{V_e}{T_{e\infty}} \right| |\nabla T_{e\infty}|$ (10). Только этот коэффициент непосредственно зависит от коэффициента теплопроводности ε . Проведенный при $\varepsilon = \varepsilon^{(0)} y^\gamma$, $\varepsilon = \varepsilon^{(0)} \exp(\alpha y)$ с помощью выражения для f_T (10) численный анализ, в частности, показал, что зависимость коэффициента теплопроводности от радиальной координаты может оказать значительное влияние на величину скорости термофореза сферической частицы; при равных радиусах, термофоретическая скорость неоднородной сферической частицы, при любом виде зависимости её коэффициента теплопроводности от радиальной координаты, больше (меньше) скорости термофореза тех однородных частиц, у которых значения коэффициента теплопроводности больше (меньше) значений коэффициента теплопроводности неоднородной частицы; увеличение (уменьшение) значений коэффициента теплопроводности неоднородной частицы приводит к уменьшению (увеличению) её термофоретической скорости; в наибольшей степени неоднородность теплофизических свойств частицы сказывается на величине термофоретической скорости крупных частиц; увеличение числа Кнудсена (Kn) приводит к сближению величин скоростей термофореза неоднородных умеренно крупных частиц. Сближение величин скоростей можно объяснить тем, что при увеличении числа Кнудсена на термофоретическое движение частиц всё большее влияние оказывают поверхностные газокинетические эффекты, а влияние неоднородности теплофизических свойств частицы на скорость термофореза уменьшается.

Кривые на рис.1 и рис.2 показывают зависимость от числа Кнудсена Kn коэффициента f_T твёрдых умеренно крупных сферических частиц с коэффициентами теплопроводности $\varepsilon = \varepsilon^{(0)} y^\gamma$, $\varepsilon = \varepsilon^{(0)} \exp(\alpha y)$, $\varepsilon^{(0)} = 0,23$ Вт/м·К, находящихся в воздухе с $T_{e\infty} = 20^\circ$ С и давлением $p_\infty = 101325$ Па. Кривые на рис.1 построены при $\gamma = 3$ (кривая 1), $\gamma = 1$ (кривая 2), $\gamma = 0$ (кривая 3), $\gamma = -1$ (кривая 4), $\gamma = -3$ (кривая 5). Кривые на рис.2 показывают зависимость f_T от Kn при $\alpha = -3$ (кривая 1), $\alpha = -1$ (кривая 2), $\alpha = 0$ (кривая 3), $\alpha = 1$ (кривая 4), $\alpha = 3$ (кривая 5). Расчеты были проведены при, приведенных выше, значениях газокинетических коэффициентов, найденных в [3]. Для сравнения на рисунках приведены кривые зависимости f_T от Kn неоднородных частиц и однородной частицы (кривые 3) из бакелита, у которой $\varepsilon^{(0)} = 0,23$ Вт/м·К.

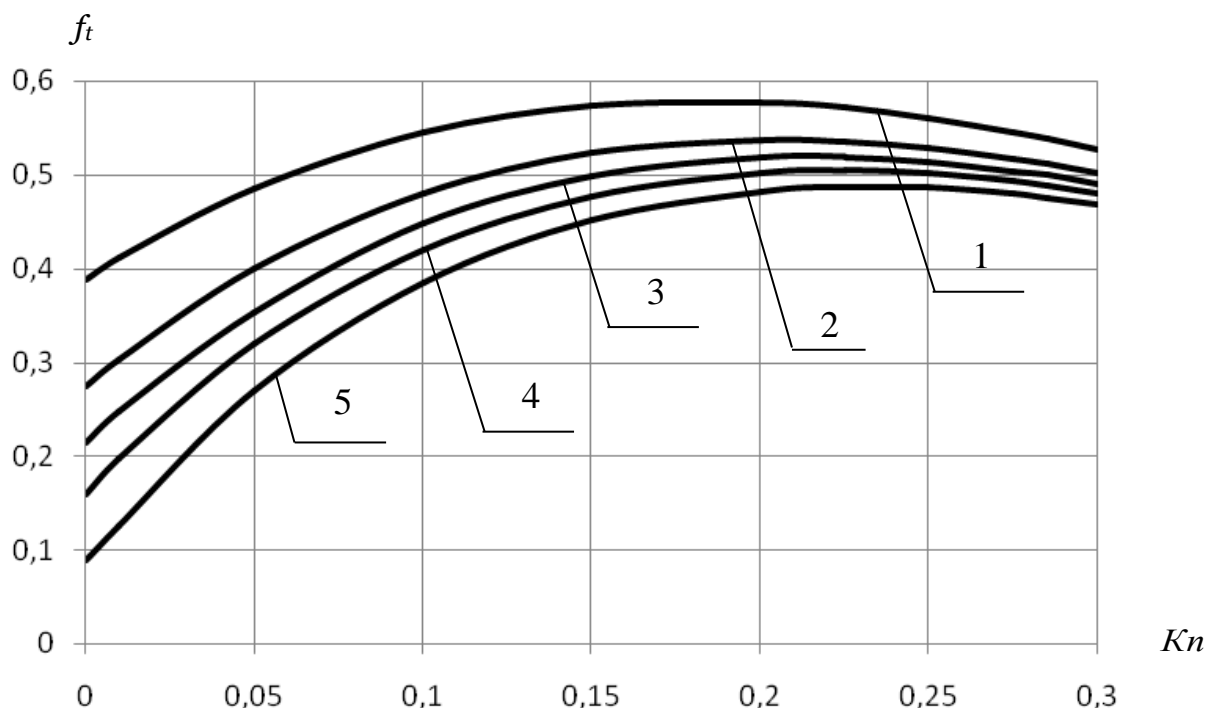


Рис.1. Зависимости от числа Кнудсена (Kn) отношения f_T умеренно крупных твёрдых сферических частиц с коэффициентом теплопроводности $\varepsilon = \varepsilon^{(0)} y^\gamma$.

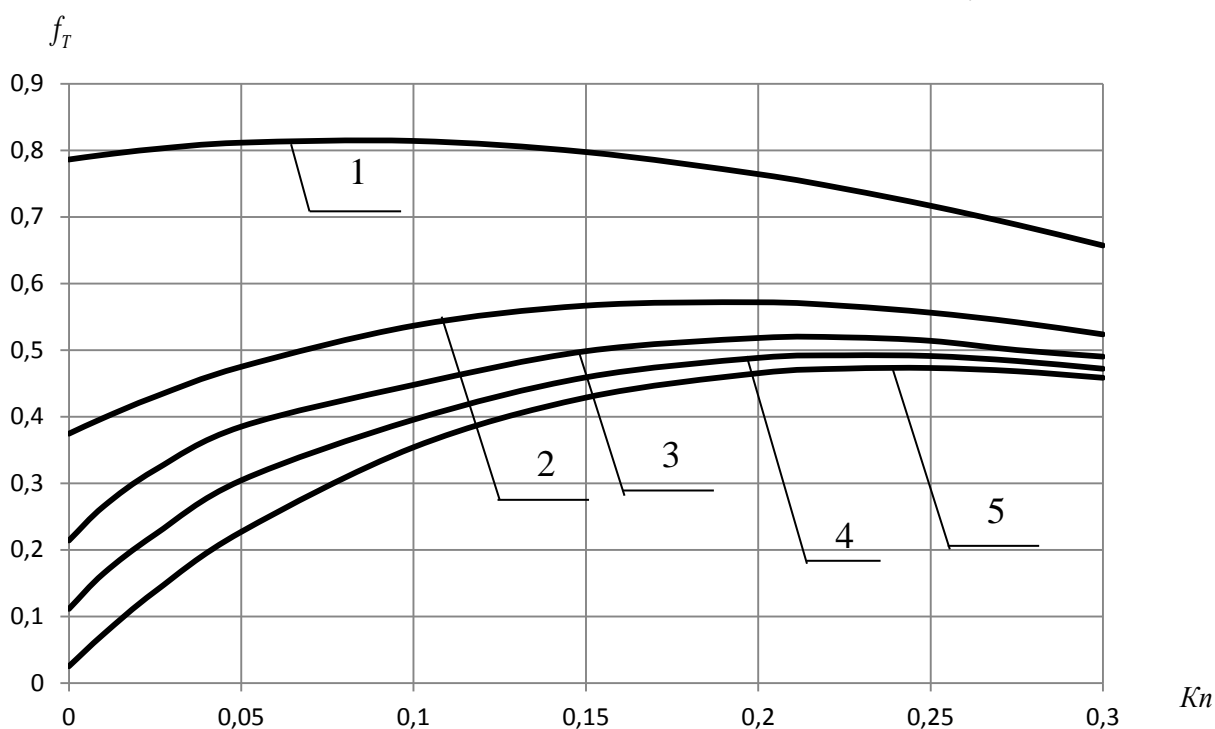


Рис.2. Зависимости от числа Кнудсена (Kn) отношения f_T умеренно крупных твёрдых сферических частиц с коэффициентом теплопроводности $\varepsilon = \varepsilon^{(0)} \exp(\alpha y)$.

Список литературы

1. Грин Х., Лейн В. Аэрозоли – пыли, дымы и туманы: монография. М.: Химия, 1969 – 428 с.
2. Щукин Е.Р. О движении аэрозольных частиц с неоднородным распределением тепловых источников в поле внешних градиентов температуры и концентрации// Журнал технической физики, 1980. Т.50. Вып.6. С.1332-1335.



3. Поддоскин А.Б., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. Теория термофореза умеренно крупных аэрозольных частиц // Журнал технической физики, 1982. Т.52. Вып.11. С.2253-2661.
4. Zheng F. Thermophoresis of spherical and non-spherical particles: a review of theories and experiment // Advances in Colloid and Interface Science, 2002. V. 97. Pp. 255 – 278.
5. Шукин Е.Р., Шулиманова З.Л. Особенности осаждения за счёт термофореза аэрозольных частиц в плоскопараллельных каналах со значительными поперечными перепадами температуры // Теплофизика высоких температур, 1994. Т.32. №5. С. 726 – 731.
6. Гейнц Ю.Э., Землянов А.А., Зуев В.Е., Кабанов А.И., Погодаев В.А. Нелинейная оптика атмосферного аэрозоля: монография. Томск: СО РАН, 1999 – 260 с.
7. Шукин Е.Р., Трайтак С.Д. О роли термодиффузиофоретического и броуновского движения при захвате аэрозольных частиц каплями// Физика атмосферы и океана, 1979. Т.15. №1. С.122-125.
8. Kosik I., Matejec V. New way for influencing thermophoretic efficiency in the MCV process // Journal Aerosol Science, 1995. V.26. Pp. 399 – 407.
9. Марков М.Г., Шукин Е.Р. Термодиффузиофорез малой летучей аэрозольной частицы в многокомпонентной газовой смеси // ДАН СССР, 1984. Т.246. №3. С.604 – 609.
10. Ивлев И.С. Микроструктурные особенности аэрозолей вулканического происхождения// Оптика атмосферы и океана, 1996. №8. С. 1039-1057.
11. Яворский Н.А., Теробенин А.Н., Быков А.П. Улавливание аэрозолей в оловянной промышленности. Новосибирск: Наука, 1974. 86 с.
12. Маясов Е.Г., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. О термофорезе нелетучей сферической частицы в разреженном газе при малых числах Кнудсена// Письма в журнал технической физики, 1988. Т.14. Вып.6. С.498 – 502.
13. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса: М.: Мир, 1976. 630 с.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Т.6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.

References

1. Green X, Lane V. Aerозоли – a dust, smokes and fogs. M: Chemistry, 1969. 428 pp.
2. Schukin E.P. About movement of aerosol particles with non-uniform distribution of thermal sources in the field of external gradients of temperature and concentration // ZbTF, 1980. Vol. 50. Iss.6. Pp. 1332-1335.
3. Poddoskin A.B., Jushkanov A.A., Jalamov JU.I. Theory thermophoresa moderately large aerosol particles // ZbTF. 1982. Vol. 52. Iss.11. Pp. 2253-2661.
4. Zheng F. Thermophoresis of spherical and non-spherical particles: a review of theories and experiment // Advances in Colloid and Interface Science, 2002. V. 97. Pp. 255 – 278.
5. Shchukin E.R., Shulimanova Z.L. Feature of sedimentation for the account thermophoresa aerosol particles in plane-parallel channels with considerable cross-section temperature drops // Thermophysics of high temperatures, 1994. V. 32. No. 5. Pp. 726-731.
6. Gejnts J.E., Zemljanov A.A., Zuev V. E, Kabanov A.I., Pogodaev I.A. Nonlinear atmosphere optics. Publishing house of the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, 1999. 260 pp.
7. Schukin E.R., Trajtak C.D. About a role of thermo-and diffusiophoresis and Brownian motion at capture of aerosol particles by drops//Physics of atmosphere and ocean, 1979. V.15. No. 1. Pp. 122-125.
8. Kosik I., Matejec V. New way for influencing thermophoretic efficiency in the MCV process // Journal Aerosol Science, 1995. V.26. Pp. 399 – 407.
9. Markov M. G, Schukin E.R. Thermodiffuziophores of a small flying aerosol particle in a multicomponent gas mix // Dokl. USSR Academy of Sci., 1984. V .246. No 3. Pp.604 – 609.
10. Ivlev I.S. Mikrostukturnye of feature of aerosols of a volcanic origin//The optic of the atmosphere and ocean, 1996. No 8. Pp. 1039-1057.
11. Javorskij N.A., Terebenin A.N., Bikov A.P. Catching's Bulls of aerosols in the tin industry. Novosibirsk: The Science, 1974. 86 pp.
12. Majasov E.G., Jushkanov A.A., Jalamov Ю.И. About thermophores a nonvolatile spherical particle in the rarefied gas at small numbers of Knudsen // Letters in Journal of Technical Physics, 1988. V.14. No. 6. Pp.498 – 502.
13. Happel J., Brenner H. Low Reynolds number hydrodynamics. M.: Mir, 1976. 630 pp.
14. Landau L.D., Lifshits E.M. Hydrodynamics. M.: Nauka. 1988. 736 pp.

УДК 533.72:532

О ТЕРМОФОРЕЗЕ НЕОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ**THERMOPHORESIS NON-UNIFORM OF CYLINDRICAL AEROSOL PARTICLES****¹Е.Р. Шукин, ²Н.В. Малай, Э.Л. Шулиманова
E.R. Shchukin, N.V. Malay, Z.L. Shulimanova**

¹Объединенный институт высоких температур РАН, Россия, Москва, ул. Ижорская, д. 13/19
The Leading Scientist of Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Science,
Russia, Moscow, 13/19 Izhora St

²Белгородский национальный исследовательский университет, Россия, 308015, г.Белгород, ул. Победы, 85
Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia
E-mail:malay@bsu.edu.ru; evgrom@yandex.ru; zinaida110@yandex.ru

Ключевые слова: термофорез аэрозольной частицы цилиндрической формы
Key words: thermophoresis of an aerosol particle of the cylindrical form

Аннотация. В квазистационарном приближении при числах Рейнольдса много меньших единицы решена задача о термофоретической движении в однокомпонентном газе твердой неоднородной умеренно крупной цилиндрической аэрозольной частицы с коэффициентом теплопроводности, зависящим от радиальной координаты. Проведенный численный анализ показал, что зависимость коэффициента теплопроводности от радиальной координаты может оказать значительное влияние на скорость термофореза. При одинаковых радиусах и одинаковой зависимости коэффициентов теплопроводности от радиальной координаты, скорость термофореза цилиндрических частиц меньше, чем у сферических.

Resume. The problem of thermophoretic motion in one-component gas solid non-uniform moderately large spherical aerosol particles with a thermal conductivity that depends on the radial coordinate is solved in quasi-stationary approximation for small Reynolds. The numerical analysis has showed that the dependence of thermal conductivity on radial coordinate can have a significant impact on the thermophoresis velocity. At identical radiuses and identical dependence of factors of heat conductivity on radial co-ordinate, the thermophoresis velocity is less than cylindrical particles, than at the spherical.

Введение

В естественных и антропогенных аэрозолях упорядоченное движение частиц относительно несущей газообразной среды часто может происходить при малых скоростях [1-4]. Поэтому целенаправленное всестороннее изучение закономерностей медленного движения аэрозольных частиц под действием сил различной природы представляет значительный интерес для механики аэрозолей. В опубликованных до настоящего времени работах по механике аэрозолей большее внимание было уделено вопросам медленного движения частиц, происходящего в изотермических условиях [1-4].

Но упорядоченное медленное движение частиц может происходить и в неоднородных по температуре газах, например, термофоретическое [1-10]. Это движение частиц обусловлено, молекулярной природы, термофоретической силой [1-10]. Она действует на частицы тогда, когда неоднородное распределение температуры в окрестности частиц вызвано внешним градиентом температуры. При таких условиях термофоретическое движение частиц происходит, например, в разнотемпературных каналах плоскопараллельных термопреципитаторов [11]. Появление термофоретической силы связано с передачей частицам молекулами более теплых областей газа большего нескомпенсированного импульса. В связи с этим термофоретическая сила перемещает частицы в области с более низкой температурой [9]. Когда термофоретическая сила становится равной по величине силе сопротивления среды движению частицы, то при этом частица начинает двигаться равномерно [3-10]. Скорость этого равномерного движения относительно центра инерции газообразной среды в месте нахождения частицы называют термофоретической [1-10]. Термофоретическое движение можно широко использовать в практических приложениях при



ламинарном обтекании, содержащим частицы, нагретым газом, охлаждаемых поверхностей [3,4,11]. Например, его можно использовать при очистке небольших объёмов воздуха, отборе аэрозольных проб, нанесении, заданной толщины, специальных покрытий из аэрозольных частиц [3,4,10-12], получении методом VAD [13] высококачественных оптических волокон. Знание закономерностей термофоретического движения требуется и при определении времени образования на поверхностях тепло- и массообмена вредных отложений из аэрозольных частиц [11,12] и при решении вопросов ядерной безопасности [3,9], например, когда нужно оценивать скорости осаждения радиоактивных аэрозольных частиц, случайно испускаемых в реакторе, в местах с большим градиентом температуры [9]. Поэтому вывод формул, описывающих термофоретическое движение различного вида аэрозольных частиц с учётом их свойств, и проведение с помощью этих формул последующего анализа особенностей термофоретического движения также представляет значительный и научный и практический интерес.

Например, значительный интерес представляет изучение особенностей термофоретического движения крупных и умеренно крупных [4-10] аэрозольных частиц в связи с тем, что скорость термофореза этих частиц, в отличие от малых частиц [4,14], сильно зависит от их коэффициентов теплопроводности. К крупным частицам относят частицы с характерными числами Кнудсена $Kn = \lambda/a \leq 0,01$, где λ - средняя длина свободного пробега молекул газа, параметры a - характерные размеры частицы. У умеренно крупных частиц $0,01 \leq Kn \leq 0,3$ [4-8]. Вывод формул, описывающих термофорез крупных и умеренно крупных частиц, чаще всего проводят гидродинамическим методом [3-10,15]. При этом взаимодействие молекул газа с поверхностью частицы учитывают с помощью специальных газокинетических граничных условий [4,7-10], которые получают с помощью функции распределения, описывающей поведение газа в слое Кнудсена [4,7].

Следует отметить, что в состав промышленных и естественных аэрозолей могут входить как однородные, так и неоднородные по теплофизическим свойствам твёрдые крупные и умеренно крупные сильно вытянутые аэрозольные частицы с формой поверхности близкой к цилиндрической [3-5,8-10]. Такие частицы могут образовываться в промышленности, например, при получении композиционных материалов (типа сибунита) и протекании природных вулканических процессов [16,17]. Ранее в работах [5,8,9] была получена следующая формула для скорости термофореза твёрдых крупных и умеренно крупных длинных цилиндрических частиц, расположенных перпендикулярно внешнему градиенту температуры газа ∇T_{∞} :

$$\vec{U}_T = -f_T \frac{\nu_e}{T_{\infty}} \nabla T_{\infty}, \quad f_T = K_{TS}^{(0)} \frac{(\kappa_e + \varepsilon K_T^{(T)} Kn)}{(1 + 2c_m Kn)[\kappa_e + \varepsilon(1 + K_T^{(T)} Kn)]},$$

где $\nu_e = \mu_e / \rho_e$ - коэффициент кинематической вязкости газа; T_{∞} - температура газа в месте нахождения частицы; K_e , ε - коэффициенты теплопроводности газа и частицы; $K_{TS}^{(0)}$, c_m - коэффициенты теплового и изотермического скольжений; $K_T^{(T)}$ - коэффициент скачка температуры [5,8,9]. Но с помощью приведённой формулы, оценивать скорость термофореза можно только в случае частиц с постоянным коэффициентом теплопроводности. В настоящей работе получена уже более общая формула для скорости термофореза длинной цилиндрической

частицы, у которой коэффициент теплопроводности ε произвольным образом зависит от радиальной координаты r . С помощью этой формулы было показано, что зависимость коэффициента теплопроводности от радиальной координаты может оказать значительное влияние на величину скорости термофореза и цилиндрических частиц, что нужно учитывать при проведении оценок в практических приложениях.

Постановка задачи

В неоднородном по температуре однокомпонентном газе в поле внешнего градиента температуры ∇T_{∞} находится твёрдая умеренно крупная длинная цилиндрическая частица, которая расположена перпендикулярно ∇T_{∞} . При этом газ, взаимодействуя с поверхностью частицы, начинает двигаться вдоль её поверхности в направлении возрастания температуры. Это явление называют тепловым скольжением [3-10]. Тепловое скольжение вызывает появление термофоретической силы [8,9]. Длина частицы много больше её радиуса R . Коэффициент теплопроводности частицы ε зависит от радиальной координаты r . Этот коэффициент и его производная являются непрерывно дифференцируемыми функциями. На величину градиента температуры наложено ограничение: $R|\nabla T_{\infty}|/T_{\infty} \ll 1$ [4-10]. В связи с малостью времён релаксации температурного и гидродинамических полей системы газ – частица, описание процесса термофоретического движения проводится в квазистационарном приближении [4-10,15]. У частицы число $Kn = \lambda/R \leq 0,3$. Поэтому, при решении задачи используется гидродинамический метод [4-10,15]. Относительные перепады температуры в окрестности частицы достаточно малы, чтобы газ можно было считать несжимаемым, а его плотность ρ_e и коэффициенты динамической вязкости μ_e и теплопроводности κ_e – постоянными величинами [4-10]. Движение частицы происходит при малых числах Рейнольдса $Re \ll 1$ и Пекле $Pe \ll 1$ [4-10], когда в уравнениях переноса импульса и тепла можно пренебречь конвективными членами [4-10,15]. В случае установившегося термофоретического движения частицы, действующая на частицу полная сила равна нулю [3-10]. При этом термофоретическое движение частицы происходит при постоянном давлении [4-10]. Поэтому при решении задач о скорости термофореза крупных и умеренно крупных частиц, в уравнениях Навье-Стокса [4-10,15] можно не учитывать давление. Описание процесса термофоретического движения проводится в цилиндрической системе координат, у которой ось OZ совпадает с осью вращения цилиндра, а направление полярной оси OX совпадает с направлением ∇T_{∞} . Определенная в такой системе координат массовая скорость установившегося течения газа на бесконечности равна по величине скорости термофореза частицы, но противоположна ей по направлению.

Формула для скорости термофореза

При рассмотренных условиях, в системе частица – газообразная среда распределения массовой скорости \vec{V} , температур газа T_e и частицы T описываются следующей системой уравнений:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{\theta}}{\partial \theta} = 0, \quad \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_{\theta}}{\partial \theta} \right\} = 0,$$



$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} V_\theta \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{V_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right\} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_e}{\partial \theta^2} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\varepsilon r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \varepsilon \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0,$$

где r и θ – цилиндрические координаты [5,8,9,15], V_r и V_θ – компоненты массовой скорости газа в цилиндрической системе координат.

Систему уравнений (1) нужно решать совместно с, приведёнными в [8], граничными условиями (2)-(5):

$$V_r|_{r=R} = c_m Kn \frac{v_e}{RT_{e\infty}} \frac{\partial^2 T_e}{\partial \theta^2} \Big|_{r=R}, \quad (2)$$

$$V_\theta|_{r=R} = c_m KnR \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] + K_{TS}^{(0)} (1 + Kn\beta'_R) \frac{v_e}{RT_{e\infty}} \frac{\partial T_e}{\partial \theta} + K_{TS}^{(0)} Kn\beta_R \frac{v_e}{T_{e\infty}} \frac{\partial^2 T_e}{\partial r \partial \theta} - K_{TS}^{(0)} Kn\beta_B \frac{v_e}{2T_{e\infty}} R \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial T_e}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T_e}{\partial \theta \partial r} \right] \Big|_{r=R} \quad (3)$$

$$T_e - T|_{r=R} = K_T^{(T)} KnR \frac{\partial T_e}{\partial r} \Big|_{r=R}, \quad -\kappa_e \frac{\partial T_e}{\partial r} + \varepsilon \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = -c_q \kappa_e Kn \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T_e}{\partial \theta^2} \Big|_{r=R}, \quad (4)$$

$$V_r|_{r \rightarrow \infty} = V_\infty \cos \theta, \quad V_\theta|_{r \rightarrow \infty} = -V_\infty \sin \theta, \quad T_e|_{r \rightarrow \infty} = T_{e\infty} + r \left| \vec{\nabla} T_{e\infty} \right| \cos \theta, \quad (5)$$

где $v_e = \mu_e / \rho_e$ – коэффициент кинематической вязкости газа, $T_{e\infty}$ – температура газа в месте нахождения частицы. Условия (2)-(4) – это специальные газокинетические условия на поверхности частицы [8], которые позволяют учитывать динамическое взаимодействие неоднородного по температуре газа с частицей. Они записаны с учётом эффектов, линейных по числу Кнудсена [8]. В (2)-(4) $K_{TS}^{(0)}, c_m$ – коэффициенты теплового и изотермического скольжений [5,8,9]; коэффициенты $\beta'_R, \beta_R, \beta_B$ позволяют учесть дополнительное влияние, которое оказывают на тепловое скольжение кривизна поверхности частицы и барнеттовские температурные напряжения [8]; c_q, c_V – газокинетические коэффициенты потоков тепла и среднемассового переноса, растекающихся в слое Кнудсена [8]; коэффициент $K_T^{(T)}$ – коэффициент скачка температуры [8,9]. Приведённые в [8], значения газокинетических коэффициентов $K_{TS}^{(0)}, c_m, \beta'_R, \beta_R, \beta_B, c_q, c_V$ равны:

$$K_{TS}^{(0)} = 1,152, c_m = 1,146, \beta'_R = -2,103, \beta_R = 0,627, \beta_B = 3,651, K_T^{(T)} = 2,208, c_V = 0,760, c_q = 0,351. \quad (6)$$

В процессе решения граничной задачи (1)-(5) было получено следующее выражение для скорости термомореза:

$$\vec{U}_T = -f_T \frac{v_e}{T_{e\infty}} \nabla T_{e\infty}, \quad (7)$$

$$f_T = K_{TS}^{(0)} \left\{ [1 + Kn(\beta'_R + \beta_B)] - (1 + 4c_m Kn)c_v^* Kn \left[\kappa_\epsilon \varphi^{(s)} + \epsilon^{(s)} K_T^{(T)} Kn \frac{d\varphi^{(s)}}{dy} \right] + \right. \\ \left. + Kn(\beta_R - \beta_B) \left(\epsilon^{(s)} \frac{d\varphi^{(s)}}{dy} - \kappa_\epsilon c_q Kn \varphi^{(s)} \right) \right\} / (1 + 2c_m Kn) d, \quad (8)$$

$$d = \left[\kappa_\epsilon (1 - c_q Kn) \varphi^{(s)} + \epsilon^{(s)} (1 + K_T^{(T)} Kn) \frac{d\varphi^{(s)}}{dy} \right], \quad c_v^* = c_v / K_{TS}^{(0)}, \quad y = r / R$$

В выражении (8) верхним индексом “s” обозначены значения коэффициента теплопроводности ϵ , функции φ и её производной $d\varphi/dy$ при $y=1$, т.е. у поверхности частицы. Функция φ – зависящее от y , не расходящееся при $y=0$, безразмерное частное решение уравнения

$$\epsilon y^2 \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + y \frac{d}{dy} (\epsilon y) \frac{d\varphi}{dy} - \varphi = 0. \quad (9)$$

В общем случае зависимость функций φ от y может быть найдена в ходе численного решения (9). Если коэффициент ϵ может быть представлен при $y \leq 1$ в виде бесконечного сходящегося ряда, т.е.

$$\epsilon = \epsilon^{(0)} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k y^k, \quad \alpha_0 = 1, \quad (10)$$

то при этом выражение для φ может быть представлено в виде следующего степенного ряда:

$$\varphi = y \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n y^n, \quad \beta_0 = 1. \quad (11)$$

Рекуррентное соотношение для, входящих в (11), коэффициентов β_n равно:

$$\beta_{n \geq 1} = -\frac{1}{n(n+2)} \sum_{k=1}^n [(n-k)(n+2)+k] \alpha_k \beta_{n-k}, \quad \beta_0 = 1 \quad (12)$$

В случае $\epsilon_1 = \epsilon_1^{(0)} (1 + \xi y)^\gamma, |\xi y| < 1$, значения, входящих в разложение (11), коэффициентов β_n можно находить непосредственно по формуле

$$\beta_n = (-1)^n \xi^n \prod_{k=1}^n \frac{(k^2 - 1 + \gamma k)}{k(k+2)}, \quad \beta_0 = 1. \quad (13)$$

Из формулы (13) следует, что коэффициентам $\gamma = (n^2 - 1)/n$ соответствуют функции φ , которые являются конечными рядами, состоящими из n членов.

В случае однородных частиц, когда $\epsilon = const$, функция $\varphi = y$. Если зависимость коэффициента ϵ от y описывается функциями

$$\epsilon = \epsilon^{(0)} y^\gamma, \quad -\infty < \gamma < \infty; \quad (14)$$

$$\epsilon = \epsilon^{(0)} \exp(\alpha y), \quad -\infty < \alpha < \infty; \quad \epsilon = \epsilon^{(0)} (1 + \alpha y)^{-3/2}, \quad -1 < \alpha < 1, \quad (15)$$

то при этом функции φ , соответственно, равны:

$$\varphi = y^{\frac{-\gamma + \mu}{2}}, \quad \mu = \sqrt{\gamma^2 + 4}; \quad (16)$$

$$\varphi = 2 \left[\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{y \alpha^2} \right) + \frac{1}{y \alpha^2} \exp(-\alpha y) \right]; \quad \varphi = y + \frac{\alpha}{2} y^2. \quad (17)$$

Коэффициенты (14), (15) и, следовательно, формулы (16), (17) могут быть использованы, например, при оценке величины скорости термофореза частиц с большими (малыми) значениями



коэффициента теплопроводности, соответственно, в центральной части частиц (формулы (14), (16)) и у их поверхности (формулы (15),(16)). Выражение для скорости термофореза \bar{U}_T (7) при известной зависимости коэффициента теплопроводности от радиальной координаты позволяет непосредственно оценивать величину $|\bar{U}_T|$ и крупных ($Kn \leq 0,01$) и умеренно крупных цилиндрических частиц. Оценивать величину термофоретической скорости умеренно крупных частиц можно в связи с тем, что при решении задачи в граничных условиях на поверхности частицы были учтены газокинетические эффекты, линейные по числу Кнудсена [5,8.9]. При постоянном коэффициенте теплопроводности, формула (7) позволяет оценивать скорость термофореза однородных по тепловым свойствам частиц.

Для сравнения приведём выражение для, приведённого в работе [18], коэффициента f_T , входящего в формулу для скорости термофореза умеренно крупной сферической частицы с коэффициентом теплопроводности, зависящим от радиальной сферической координаты r

$$f_T = 2K_{TS}^{(0)} \left\{ [1 + Kn(\beta'_R + \beta_B) - (1 + 6c_m Kn)c_v^* Kn \left(\kappa_e \varphi^{(S)} + \varepsilon^{(S)} K_T^{(T)} Kn \frac{d\varphi^{(S)}}{dy} \right) + \right. \\ \left. + Kn(\beta_R - \beta_B) \left(\varepsilon^{(S)} \frac{d\varphi^{(S)}}{dy} - 2\kappa_e c_q Kn \varphi^{(S)} \right) \right\} / (1 + 2c_m Kn) d_e, \quad (18)$$

$$d_e = \left[2\kappa_e (1 - c_q Kn) \varphi^{(S)} + \varepsilon^{(S)} (1 + 2K_T^{(T)} Kn) \frac{d\varphi^{(S)}}{dy} \right],$$

где $c_v^* = c_v / K_{TS}^{(0)}$, $y = r/R$, $Kn = \lambda/R$, R – радиус частицы. Функция φ – зависящее от y , не расходящееся при $y=0$, безразмерное частное решение уравнения

$$\varepsilon y^2 \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d}{dy} (\varepsilon y^2) \frac{d\varphi}{dy} - 2\varepsilon \varphi = 0. \quad (19)$$

Когда $\varepsilon = \varepsilon^{(0)} = const$, функция $\varphi = y$. При $\varepsilon = \varepsilon^{(0)} y^\gamma$ и $\varepsilon = \varepsilon^{(0)} \exp(\alpha y)$ функции φ имеют, соответственно, следующий вид:

$$\varphi = y^{\frac{-1-\gamma+\mu}{2}}, \mu = \sqrt{(1+\gamma)^2 + 8}, \quad (20)$$

$$\varphi = 3 \left[\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2}{y\alpha^2} + \frac{2}{y^2\alpha^3} \right) - \frac{2}{y^2\alpha^3} \exp(-\alpha y) \right]. \quad (21)$$

Проведенный с помощью формул для коэффициентов f_T (7) и (18) в случае цилиндрических и сферических частиц численный анализ показал, что:

- 1) зависимость коэффициентов теплопроводности этих частиц от радиальной координаты может оказать значительное влияние на величину скорости термофореза и крупных и умеренно крупных частиц;
- 2) при равных радиусах, скорость рассматриваемой неоднородной цилиндрической (сферической) частицы, при любом виде зависимости её коэффициента теплопроводности от радиальной координаты, больше (меньше) скорости термофореза тех однородных частиц, у которых величина коэффициента теплопроводности больше (меньше) значений коэффициента теплопроводности неоднородной частицы;

- 3) увеличение (уменьшение) значений коэффициента теплопроводности неоднородной частицы приводит к уменьшению (увеличению) её термофоретической скорости. Это обстоятельство связано с тем, что при увеличении (уменьшении) значений коэффициента теплопроводности частицы неоднородность распределения температуры вдоль поверхности частицы уменьшается (увеличивается);
- 4) в наибольшей степени неоднородность теплофизических свойств частицы сказывается на величине термофоретической скорости крупных частиц;
- 5) увеличение числа Кнудсена (Кн) приводит к сближению величин скоростей неоднородных, даже с отличающимися зависимостями ε от радиальной координаты r , умеренно крупных и цилиндрических (и сферических) частиц. Это обстоятельство можно объяснить тем, что при увеличении числа Кнудсена на термофоретическое движение частиц всё большее влияние оказывают поверхностные газокинетические эффекты, а влияние коэффициентов теплопроводности частиц уменьшается;
- 6) при одинаковых радиусах и одинаковой зависимости коэффициентов теплопроводности от радиальной координаты, термофоретическая скорость сферических частиц больше, чем у цилиндрических.

При оценке величины f_T цилиндрических и сферических частиц, значения газокинетических коэффициентов были взяты, соответственно, из [8,7].

На рис.1-4 приведены кривые, которые показывают зависимость от числа Кн отношения $f_T = \left| \bar{U}_T \right| \left/ \frac{v_e}{T_{\infty}} \left| \nabla T_{\infty} \right| \right.$ умеренно крупных твёрдых цилиндрических (см. рис.1и рис.3) и сферических (см. рис.2 и рис.4) частиц с коэффициентами теплопроводности $\varepsilon = \varepsilon^{(0)} y^\gamma$, $\varepsilon = \varepsilon^{(0)} \exp(\alpha y)$, $\varepsilon^{(0)} = 0,23$ Вт/м·К, находящихся в воздухе с $T_{\infty} = 20^\circ$ С и давлением $p_{\infty} = 101325$ Па. Кривые на рис.1,2 построены, соответственно, при $\gamma = 0$ (кривая 1), $\gamma = -3$ (кривая 2), $\gamma = -1$ (кривая 3), $\gamma = 1$ (кривая 4), $\gamma = 3$ (кривая 5) и $\gamma = 3$ (кривая 1), $\gamma = 1$ (кривая 2), $\gamma = 0$ (кривая 3), $\gamma = -1$ (кривая 4), $\gamma = -3$ (кривая 5). Кривые рис.3,4 показывают, соответственно зависимость f_T от Кн в случае $\alpha = 0$ (кривая 1), $\alpha = -3$ (кривая 5), $\alpha = -1$ (кривая 4), $\alpha = 1$ (кривая 2), $\alpha = 3$ (кривая 3) и $\alpha = -3$ (кривая 1), $\alpha = -1$ (кривая 2), $\alpha = 0$ (кривая 3), $\alpha = 1$ (кривая 4), $\alpha = 3$ (кривая 5). Для сравнения на рисунках приведены кривые зависимости f_T от Кн неоднородных частиц и однородных частиц, у которых $\gamma = 0$, $\alpha = 0$.

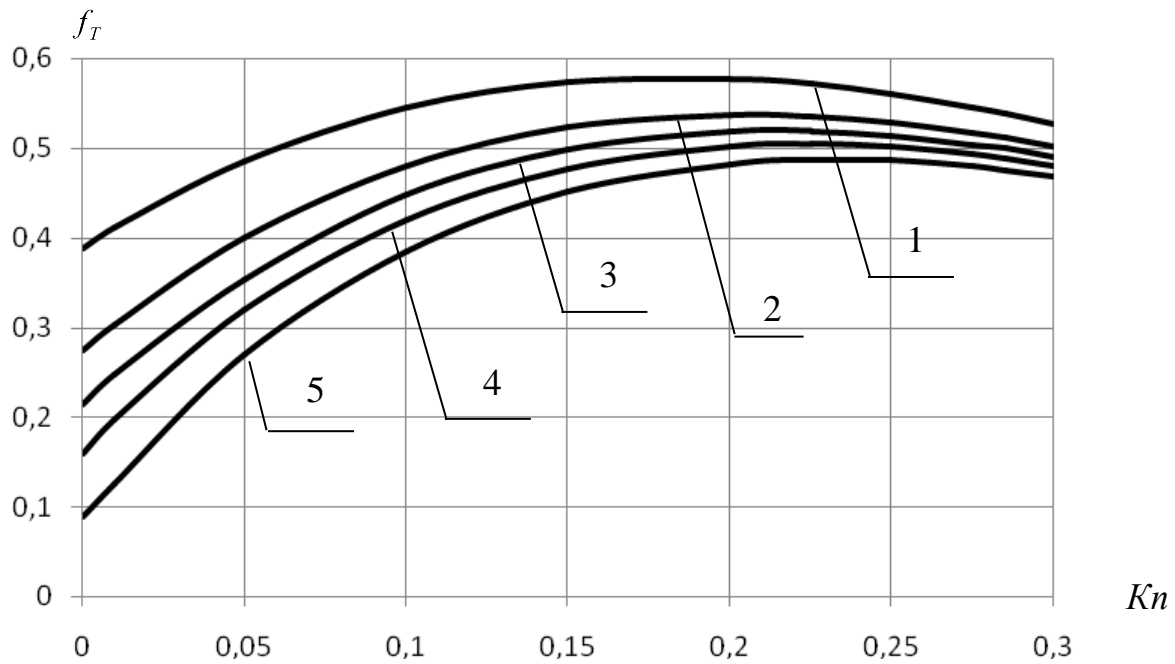


Рис.1. Кривые зависимости от числа Кнудсена (Kn) отношения f_T умеренно крупных твёрдых цилиндрических частиц с коэффициентом теплопроводности $\varepsilon = \varepsilon^{(0)} y^\gamma$. Кривые найдены при $\gamma = 0$ (кривая 1), $\gamma = -3$ (кривая 2), $\gamma = -1$ (кривая 3), $\gamma = 1$ (кривая 4), $\gamma = 3$ (кривая 5).

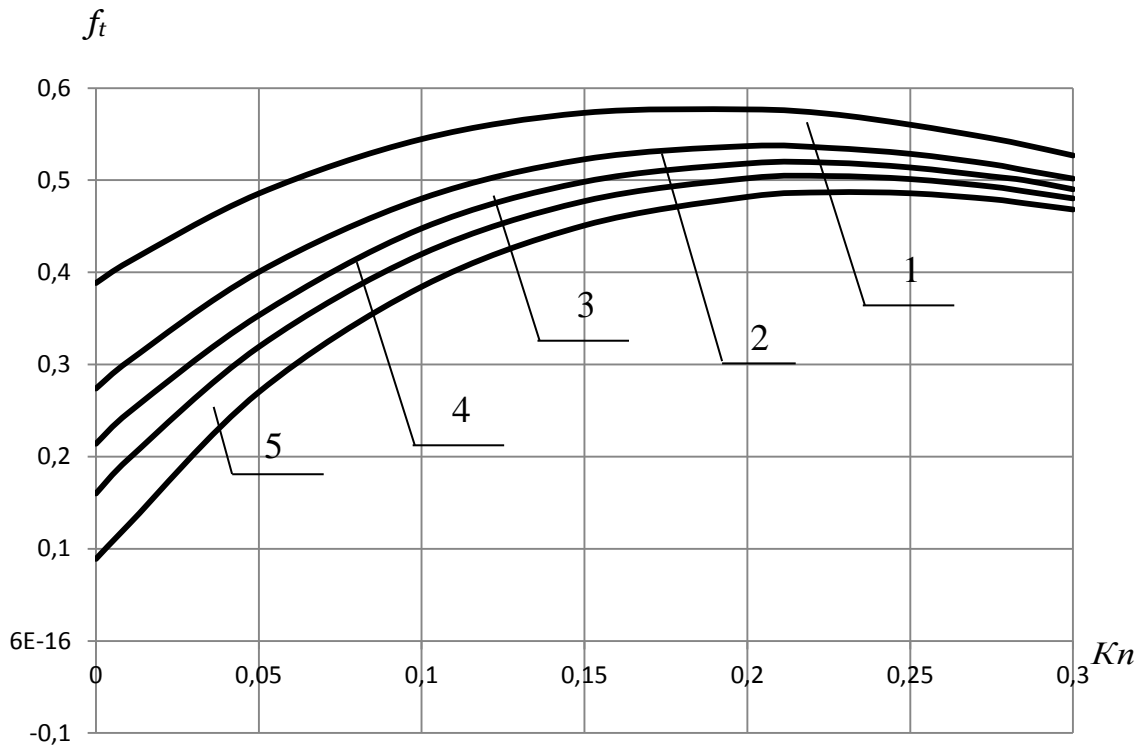


Рис.2. Зависимости от числа Kn коэффициента f_t умеренно крупных твёрдых сферических частиц с коэффициентом теплопроводности $\varepsilon = \varepsilon^{(0)} y^\gamma$. Кривые построены при $\gamma = 3$ (кривая 1), $\gamma = 1$ (кривая 2), $\gamma = 0$ (кривая 3), $\gamma = -1$ (кривая 4), $\gamma = -3$ (кривая 5).

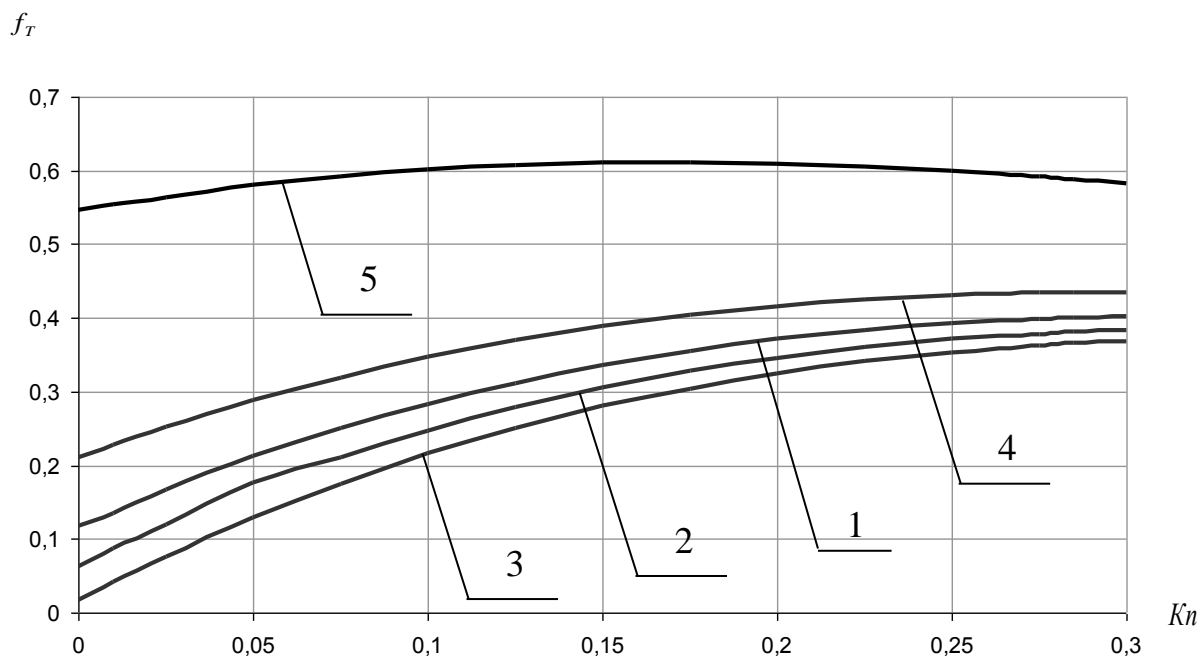


Рис.3. Кривые зависимости коэффициента f_T от Kn твёрдых цилиндрических частиц с коэффициентом $\varepsilon = \varepsilon^{(0)} \exp(\alpha y)$. Кривые найдены в случае $\alpha = 0$ (кривая 1), $\alpha = -3$ (кривая 5), $\alpha = -1$ (кривая 4), $\alpha = 1$ (кривая 2), $\alpha = 3$ (кривая 3).

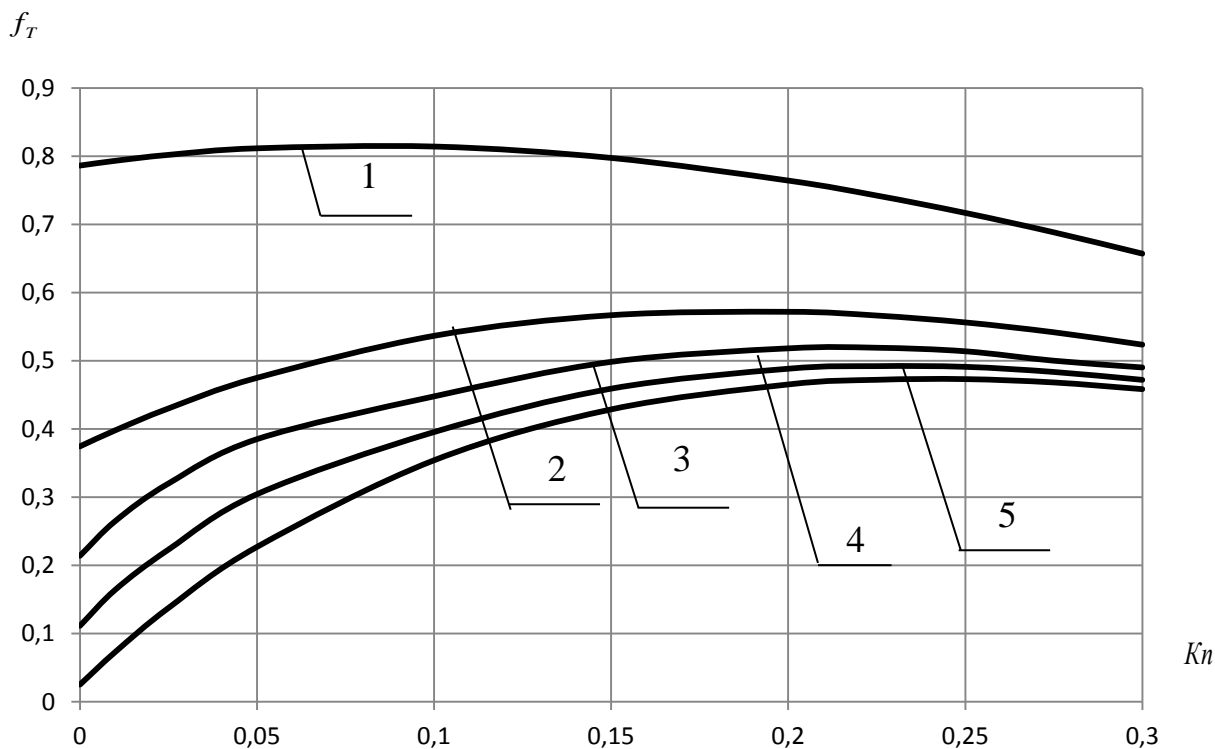


Рис.4. Зависимости от Kn отношения f_T умеренно крупных твёрдых сферических частиц с коэффициентом $\varepsilon = \varepsilon^{(0)} \exp(\alpha y)$ при $\alpha = -3$ (кривая 1), $\alpha = -1$ (кривая 2), $\alpha = 0$ (кривая 3), $\alpha = 1$ (кривая 4), $\alpha = 3$ (кривая 5).



Список литературы

1. Фукс Н.А. Механика аэрозолей М.: Изд. АН СССР, 1955. 352 с.
2. Грин Х., Лейн В. Аэрозоли – пыли, дымы и туманы. М.: Химия, 1969. 428 с.
3. Спурный К., Йех Ч., Седлачек Б. Аэрозоли. М.: Атомиздат, 1964. 360 с.
4. Пискунов В.Н. Динамика аэрозолей. М.: Физматлит, 2010. 296 с.
5. Яламов Ю. И., Афанасьев А. М. Термофорез цилиндрической аэрозольной частицы в режиме со скольжением // Журнал технической физики, 1977. Т.47. №9. С.1998-2004.
6. Щукин Е.Р. О движении аэрозольных частиц с неоднородным распределением тепловых источников в поле внешних градиентов температуры и концентрации // Журнал технической физики, 1980. Т.50. Вып.6. С.1332-1335.
7. Поддоскин А.Б., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. Теория термофореза умеренно крупных аэрозольных частиц // Журнал технической физики, 1982.- Т.52.- Вып.11.- С.2253-2661.
8. Яламов Ю.И., Сафиуллин Р.А. К теории термофореза цилиндрической аэрозольной частицы в умеренно разреженном газе // Теплофизика высоких температур, 1994. Т.32. №2. С. 271 – 275.
9. Huan J. Keh, Hung J. Tu. Thermophoresis and photophoresis of cylindrical particles // Colloids and Surfaces A : Physicochem. Eng. Aspects **176** (2001) 213-223.
10. Zheng F. Thermophoresis of spherical and non-spherical particles: a review of theories and experiments // Advances in Colloid and Interface Science, 2002. V. 97. Pp. 255 – 278.
11. Щукин Е.Р., Шулиманова З.Л. Особенности осаждения за счёт термофореза аэрозольных частиц в плоскопараллельных каналах со значительными поперечными перепадами температуры // Теплофизика высоких температур/ 1994.Т.32. №5. С. 726 – 731.
12. Berger C., Harvath H., Scindler W. The deposition of soot particles from hot gas streams through pipes // Journal of Aerosol Science, 1995. V. 26. P. 211-218.
13. Kosik I., Matejec V. New way for influencing thermophoretic efficiency in the MCV process // Journal Aerosol Science, 1995. V.26. Pp. 399 – 407.
14. Марков М.Г., Щукин Е.Р. Термодиффузиофорез малой летучей аэрозольной частицы в многокомпонентной газовой смеси // ДАН СССР, 1984. Т.246. №3. С.604 – 609.
15. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
16. Бутырин Г.И. Высокопористые углеродные материалы: монография. М.: Химия, 1986. 192 с.
17. Ивлев И.С. Микроструктурные особенности аэрозолей вулканического происхождения // Оптика атмосферы и океана, 1996. №8. С. 1039-1057.
18. Щукин Е.Р., Малай Н.В., Шулиманова З.Л. Движение в поле градиента температуры двухслойной с неоднородным ядром умеренно крупной сферической аэрозольной частицы // Вестник Тамбовского гос. университета. Серия: Естественные и технические науки. Тамбов. 2014. №3. С.933-936.

References

1. Fuchs N.A. The mechanics of aerosols M: lzd AH the USSR, 1955. 352 pp
2. Green X, Lane V. Aerezoli – a dust, smokes and fogs. M: Chemistry, 1969. 428 pp.
3. Spurny K., Yeow C., Sedlacek B. Aerosols. M.: Atomizdat, 1964. 360 pp.
4. Piskunov V. N. Dynamics of aerosols. M.: Fizmatlit, 2010. 296 pp.
5. Yalamov Y. I., Afanasiev A. M. Termophores cylindrical aerosol particles in d-bench with slip // ZbTF, 1977. V. 47. No. 9. Pp. 1998-2004.
6. Schukin E.P. About movement of aerosol particles with non-uniform distribution of thermal sources in the field of external gradients of temperature and concentration // ZbTF, 1980. V. 50. Iss.6. Pp. 1332-1335.
7. Poddoskin A.B., Jushkanov A.A., Jalamov JU.I. Theory thermophoresa moderately large aerosol particles // ZbTF. 1982. Vol. 52. Iss.11. Pp. 2253-2661.
8. Yalamov, Y. I., A. Safiullin R. On the theory of thermophoresis of a cylindrical aerosol particle in a moderately rarefied gas // Thermophysics of high temperatures, 1994. V. 32. No. 2. Pp. 271 – 275
9. Huan J. Keh, Hung J. Tu. Thermophoresis and photophoresis of cylindrical particles // Colloids and Surfaces A : Physicochem. Eng. Aspects. 2001. V. 176. Pp. 213-223
10. Zheng F. Thermophoresis of spherical and non-spherical particles: a review of theories and experiments // Advances in Colloid and Interface Science, 2002. V. 97. Pp. 255 – 278.

11. ShChukin E.R., Shulimanova Z.L. Feature of sedimentation for the account thermophoresa aerosol particles in plane-parallel channels with considerable cross-section temperature drops // Thermophysics of high temperatures, 1994. V. 32. No. 5. Pp. 726-731.
12. Berger C., Harvath H., Scindler W. The deposition of soot particles from hot gas streams through pipes// Journal of Aerosol Science, 1995. V. 26. Pp. 211-218.
13. Kosik I., Matejec V. New way for influencing thermophoretic efficiency in the MCV process // Journal Aerosol Science, 1995. V. 26. Pp. 399 – 407.
14. Markov M. G, Schukin E.R. Thermodiffuziophores of a small flying aerosol particle in a multicomponent gas mix//Dokl. USSR Academy of Sci., 1984. V.246. No 3. Pp.604 – 609.
15. Landau L.D., Lifshits E.M. Hydrodynamics. M.: Nauka. 1988. 736 pp.
16. Butyrin G.I. High-Porosity carbon materials: Monograph. M.: Chemistry, 1986. 192 pp.
17. Ivlev I.S. Mikrostrukturnye of feature of aerosols of a volcanic origin // The optic of the atmosphere and ocean, 1996. No 8. Pp. 1039-1057.
18. Shchukin E. R., Malay N.V., Sulimanova Z. L. Movement in the temperature gradient with inhomogeneous two-layer core of moderately large spherical aerosol particles// Bulletin of Tambov state University. Series: Natural and technical Sciences. Tambov. 2014, No.3. Pp. 933-936.



THE SHIFT OF ENERGY LEVELS OF A QUANTUM DOT IN SINGLE ELECTRON TRANSISTOR

M. R. Mohebbifar, R. Kh. Gainutdinov, M. A. Khamadeev

Optics and Nanophotonics Department, Institute of Physics, Kazan Federal University, Kremlevskaya

St., Kazan 420008, Russia

**Corresponding author: mmohebbifar@gmail.com*

Keywords: single electron transistor, energy shift, self-energy function, generalized dynamical equation

Abstract. The shift of Energy levels of a quantum dot in single electron transistor model is investigated. The self-energy function which related to shift of Energy levels, describing this interaction is added to a bare energy of a dot state. In the standard way of determining the self-interaction corrections to bare energies of quantum dots, the variations of the self-energy functions with energy are ignored, and these corrections are considered to be equal to the values of the self-energy functions for bare energies of states. We show that actually in the case of quantum dots the variations of the self-energy functions in the energy interval between the bare and true energies can be strong, and this can have a significant effect on the values of the tunneling-induced shifts of energy levels of quantum dots.

1. Introduction. In recent years interest arose into the study of transport through quantum dots. This interest is driven by two reasons. First, small devices like quantum dots open the possibility for future applications in electronics as transistors, memory cells, sensors etc. Small devices are especially interesting in high frequency applications due to their small capacitances. The second reason for the interest into these systems is a basic physics point of view. Quantum dots are similar to atoms or molecules since a certain number of electrons are confined in a potential. But, in contrast to real atoms, in these artificial systems the number of electrons, the size of the system and the strength of the confinement potential can easily be changed [1].

Single Electron Transistor (SET) has been made with critical dimensions of just a few nanometer using metal, semiconductor, carbon nanotubes or individual molecules [2-12]. A SET consists of a small conducting island (Quantum Dot (Q.D)) coupled to source and drain leads by tunnel junctions and capacitively coupled to one or more gate. Unlike Field Effect transistor, Single electron device based on an intrinsically quantum phenomenon, the tunnel effect. The electrical behaviour of the tunnel junction depends on how effectively barrier transmit the electron wave, which decrease exponentially with the thickness and on the number of electron waves modes that impinge on the barrier, which is given by the area of tunnel junction divided by the square of wave length. Figure (1) shows the schematic of SET [13, 14].

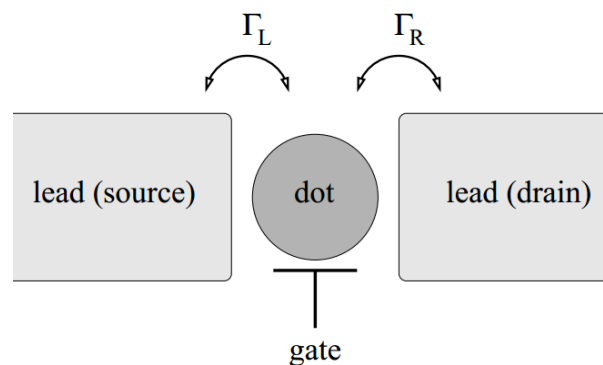


Fig. 1. Model of a quantum dot attached to two leads. We choose the left lead to be the source and the right lead to be the drain. Additionally a gate voltage is applied to the dot. Electrons tunnel from the dot to the leads and vice versa with the respective tunneling rate, Γ_L to the left lead and Γ_R to the right lead.

In the case of quantum dots the role of the virtual photons in the self-interaction of ordinary atoms can be played, for example, by electrons that leave the quantum dot and then come back. Such a self-interaction can be much more significant than the interaction of an atom with its own radiation field. In this paper by using generalized dynamical equation (GDE) we investigate the effect of such a self-interaction on the tunneling-induced shift of energy levels of a quantum dot.

2. Theory. In our study we use non-perturbative methods of its description based on the GDE, which in [15] has been derived as a direct consequence of the first principles of quantum physics. Being equivalent to the Schrödinger equation in the case when the interaction in a quantum system is instantaneous, GDE allows one to extend dynamics to the case of nonlocal-in-time interactions. This equation provides a new insight into many problems in atomic physics [16–19], nuclear physics [20–23] and quantum optics [24, 25]. The contribution to the Green operator $G(z)$, which comes from the processes associated with the self-interaction of particles, has the same structure as the free Green operator $G_0(z)$. So it is natural to replace $G_0(z)$ by the operator $G_0^{(v)}(z)$, which describes the evolution of the system when particles propagate freely or interact with vacuum, and, hence, has the structure

$$\langle m' | G_0^{(v)}(z) | m \rangle = \frac{\langle m' | m \rangle}{z - E_m - C_m(z)} \tag{1}$$

With $|m\rangle$ being the eigenvectors of the free Hamiltonian ($H_0 |m\rangle = E_0 |m\rangle$). Other contributions are described by the operator $G^{(I)}(z) = G_0^{(v)}(z)M(z)G_0^{(v)}(z)$:

$G(z) = G_0^{(v)}(z) + G^{(I)}(z) \equiv G_0^{(v)}(z) + G_0^{(v)}(z)M(z)G_0^{(v)}(z)$, where the operator $M(z)$ describes the processes in which some particles interact each with other. The equations for $C(z)$ and $M(z)$ are derived from GDE. The equation for the function $C_m(z)$ referred to as the self-energy function reads

$$dC_m(z)/dz = -\langle m | M(z) [G_0^{(v)}(z)]^2 M(z) | m \rangle, \langle m | m \rangle = 1 \tag{2}$$

The condition

$$z - E_m^{(0)} - C_m(z) = 0 \tag{3}$$

determines the physical masses of particles. In the case when we deal with an atom and $|m\rangle$ describes an atomic state, equation (3) determines the self-energy correction (the Lamb shift) to the energy E_m of the state $|m\rangle$. An approximated solution of this equation is

$$E_m \equiv E_m^{(0)} + C_m^{(0)}(E_m^{(0)}) \equiv E_m^{(0)} + \Delta E_m^L - i\Gamma_m/2, \text{ with } \Delta E_m^L \text{ and } \Gamma_m \text{ being the Lamb shift and the}$$

natural width of the energy level of the state $|m\rangle$ respectively. For this approximation to be valid the variation of $C_m(z)$ in the energy interval between $E_m^{(0)}$ and E_m must be negligible. This is the case for atoms in free space. In fact, at leading order in α the equation for $C_m(z)$ is reduced to the equation [26, 27]

$$dC_m^{(0)}(z)/dz = -\langle m | H_I [G_0^{(v)}(z)]^2 H_I | m \rangle, \langle m | m \rangle = 1 \tag{4}$$

With H_I being the interaction Hamiltonian. By solving this equation with an appropriate boundary condition we arrive at the ordinary expressions for the self-energy shifts and widths of energy levels. However, in the case of quantum dots the variation of the self-energy function in the relevant



vicinity of the point $z = E_m^{(0)}$ can be very significant and, as a result, the above approximation is invalid. In this case the self-interaction function cannot be parameterized by a shift and a width, and one has to derive the self-energy function from a non-perturbative solution of the equations for $C_m(z)$ and $M(z)$.

2. Results and Discussion. We study the self-interaction of a single-level quantum dot with arbitrary strong one-site Coulomb interaction tunnel coupled to two non-interacting leads. The Hamiltonian of system consisting of quantum dot and leads is described by [28]

$$H = H_{Q.D} + H_{T.P} + H_L \quad (5)$$

Where $H_{Q.D}$ is the Hamiltonian of quantum dot, $H_{T.P}$ is the Hamiltonian of tunneling process between leads and quantum dot and the Hamiltonian of leads is H_L .

The quantum dot can be described by the single-level Anderson impurity model, and $H_{Q.D}$ equal to

$$H_{Q.D} = \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} E d_{\sigma}^{\dagger} d_{\sigma} + U n_{\uparrow} n_{\downarrow} \quad (6)$$

Where the creation (annihilation) operator for an electron with spin σ on the dot is given by d_{σ}^{\dagger} and d_{σ} , also $n_{\sigma} = d_{\sigma}^{\dagger} d_{\sigma}$ is the number operator. The on-site repulsion U describes the energy cost for double occupation (when we have two electrons in quantum dot) and stems from Coulomb interaction. The Hamiltonian $H_{T.P}$ is given by

$$H_{T.P} = \sum_{\alpha,k,\sigma} V_{\alpha} C_{\alpha,k,\sigma}^{\dagger} d_{\sigma} + H.C. \quad (7)$$

Where V_{α} is the momentum and spin-independent tunnel matrix element, $C_{\alpha,k,\sigma}^{\dagger}$ ($C_{\alpha,k,\sigma}$) is creation (annihilation) operators for electrons with spin σ and momentum k in lead and $\alpha=l,r$. The Hamiltonian H_L is given by

$$H_L = \sum_{\alpha,k,\sigma} E_{\alpha,k} C_{\alpha,k,\sigma}^{\dagger} C_{\alpha,k,\sigma} \quad (8)$$

The chemical potentials of the two leads differ by the applied bias $\mu_l - \mu_r = -eV$. We assume that the density of states ρ_{α} in the leads is constant for transport and defines the tunnel coupling strength R_{α} as $R_{\alpha} = 2\pi\rho_{\alpha}|V_{\alpha}|^2$, where V_{α} is the tunnel matrix element and $R = R_l + R_r$. We will denote the states of quantum dots as $|\Psi_{\sigma}\rangle$ for a singly occupied dot with spin $\sigma = \uparrow, \downarrow$ and an empty dot $|\Psi_0\rangle$. The corresponding energies are E_{σ} and E_0 .

In this model we assume that reservoirs are in equilibrium and we average over the reservoir part of the initial states according to the Fermi distribution [28]

$$f_{\alpha}(\omega) = \left(1 + \exp\left(\frac{\omega - \mu_{\alpha}}{K_B T}\right) \right)^{-1} \quad (9)$$

By solving this equation with an appropriate boundary condition we arrive at the ordinary expressions for the self-energy shifts and widths of energy levels. Solving the leading-order equation (4)

yields the following expressions for the self-energy function $C_\sigma(z)$ of the quantum-dot state $|\Psi_\sigma\rangle$

$$C_\sigma(z) = \sum_\alpha \frac{R_\alpha}{2\pi} \int d\omega \left(\frac{1-f_\alpha(\omega)}{z-\omega} + \frac{f_\alpha(\omega)}{z+\omega-2\varepsilon-U} \right) \quad (10)$$

And the self-energy function $C_0(z)$ of the quantum-dot state $|\Psi_0\rangle$

$$C_0(z) = 2 \sum_\alpha \frac{R_\alpha}{2\pi} \int d\omega \left(\frac{f_\alpha(\omega)}{z+\omega-\varepsilon} \right) \quad (11)$$

In our calculations we have used the fact that the part that is independent of the Fermi distribution function of $C_\sigma(z)$ can be included into the correction to the energy of empty level. Taking into account this fact and using equation (1), self-energy function $C_\sigma(z)$ will be

$$C_\sigma(z) = \sum_\alpha \frac{R_\alpha}{2\pi} \int_0^\infty d\omega \left[\frac{1}{(1+\exp(\beta(\omega-\mu)))(\omega-z)} + \frac{1}{(1+\exp(\beta(\omega-\mu)))(\omega-(2\varepsilon+U-z))} \right] \quad (12)$$

Let us assume that the variations of these self-energy functions with z are weak. In this case the trivial shift of energy level of Q.D $\delta E^{(ap)}$ can be considered as the approximated energy shifts of the corresponding energy levels of the quantum dot

$$\delta E^{(ap)} = C_\sigma(z = E_\sigma = \varepsilon) - C_0(z = E_0 = 0) \quad (13)$$

And the non-trivial shift of energy level of Q.D which describe fully shift of energy level of Q.D is

$$\delta E^{(ap)} = C_\sigma(z = E_\sigma = \varepsilon) - C_0(z = E_0 = 0) = \sum_\alpha \frac{R_\alpha}{2\pi} \left(\ln \left| \frac{\varepsilon}{\varepsilon+U} \right| + \ln \left| \frac{\varepsilon+U-\mu}{\varepsilon-\mu} \right| \right) \quad (14)$$

However, as it follows from the results of our calculations the variations with z of the self-energy functions of the quantum-dot states are strong, and one has to solve equation (3) exactly. Figure (2) where the results of calculations of the self-energy correction $\delta\varepsilon = C_\sigma(z) - C_0(z)$ are depicted shows that the energy shifts obtained in this way can differ dramatically from their approximated values.

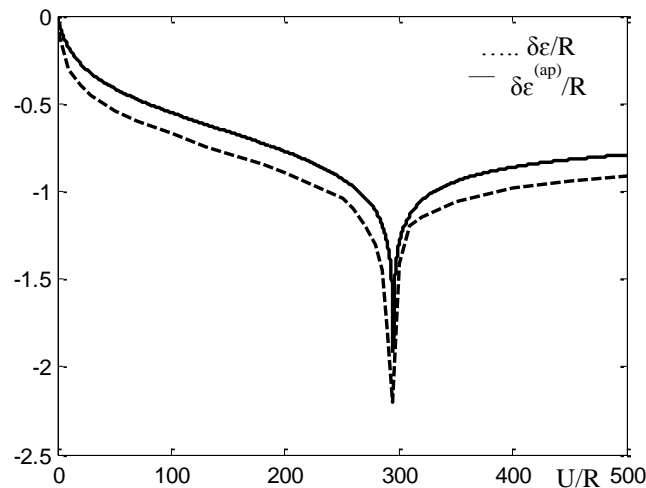


Fig. 2. Calculation results of the trivial (solid line) and non-trivial (dashed line) energy shifts of level of Q.D for the parameters $\varepsilon = 5R$, $\mu = 300R$ and for different values of the U at the zero temperature and in the assumption that the left lead is the same as the right lead.

Conclusion. In this paper by using equation (4) we have derived equations (10) and (11) for the self-energy functions of the quantum-dot states in SET. By putting $z=E_\sigma$ and $z=E_0$ in equation (10) and equation (11) respectively we arrive at the expressions for the energy shifts in quantum dots derived in [28]. This is the manifestation of the fact that in the standard way of solving the problem the energy shift is assumed to be equal to the value of the corresponding self-energy function at the bare energy. The above approximated solution of equation (2) gives rise just to the same result. If the variations of the self-energy functions $C_0(z)$ and $C_\sigma(z)$ were weak enough, then in solving equation (2) one could restrict oneself to this approximated solution. However, as it follows from the results of calculation, this is not the case, and equation (3) must be solved exactly. Figure (2) shows that the self-interaction energy shifts obtained by solving equation (3) exactly differ dramatically from the approximated shifts.

Acknowledgments

We thank Prof. R. Kh. Gainutdinov for the helpful discussions and grateful to the Department of Optics and Nanophotonics, Kazan Federal University for giving us access to their equipment.

References

1. Haug R.J., Dilger M., T. Schmidt, Blick R.H., Klitzing K.V., Eberl K., Single-electron transistors with quantum dots// *Physica B*, 1996. V. 227. Pp. 82-86.
2. Fulton T. A. and Dolan G. J., Observation of Single-Electron Charging Effect's in Small Tunnel Junctions// *Phys. Rev. Lett.*, 1987. V. 59. P. 109.
3. Cui J.B., Burghard M, Kern K. "Room temperature single electron transistor by local chemical modification of carbon nanotubes." // *Nano Letters*, 2001. 2 (2). P. 117-120
4. Postma H. W. Ch., Teepen T.F., Yao Z., Grifoni M., Dekker C. // *Science*, 2001. V. 293. P. 76
5. . Zimmerman N. M and Keller M. W., "Electrical Metrology with Single Electrons", to be published in *IOP J. Phys.*
6. Stevenson T., Aassime A., Delsing P., Schoelkopf R., Segall K., Stahle C. // *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 2001. V. 11. No. 1, Pp. 692-695.
7. Gloos K., R. S. Poikolainen, and J. P. Pekola// *Appl. Phys. Lett.*, 2000. V. 77. P. 2915.
8. Yukinori Ono, Yasuo Takahashi, Kenji Yamazaki, Masao Nagase, Hideo Namatsu, Kenji Kurihara, and Katsumi Murase// *Appl. Phys. Lett*, 2000. V. 76 P. 3121.
9. Postma H. W. Ch., Teepen T.F., Yao Z., Grifoni M., Dekker C. // *Science*, 2001. V. 293. P. 76.

10. Park H., Park J., Lim A. K. L., Anderson E. H., Alivisatos A. P. and McEuen P. L. // *Nature*, 2000. V. 407. P. 57.
11. Ji woong Park, Abhay N. Pasupathy, Jonas I. Goldsmith, Connie Chang, Yuval Yaish, Jason R. Petta, Marie Rinkoski, James P. Sethna, Héctor D. Abruña, Paul L. McEuen, and Daniel C. Ralph// *Nature*, 2002. V. 417. P. 722.
12. Wenjie Liang, Shores M. P., M. Bockrath, Long J. R., Hongkun Park//*Nature*, 2002. V. 417. P. 725.
13. Kouwenhoven L. P., D.G. Austing, and S. Tarucha// *Rep. Prog. Phys*, 2001. V. 64. Pp. 701-736.
14. Pustilnik M. and Glazman L. // *J. Phys. Cond. Mat*, 2004. V. 16. P. 513.
15. Gainutdinov R. Kh. // *J. Phys. A*, 1999. V. 32. P. 5657.
16. Gainutdinov R. Kh., Mutygullina A. A. and Scheid W.// *Proc. of SPIE*, 2001, V. 214. P. 4605.
17. Gainutdinov R. Kh., Khamadeev M. A., Mohebbifar M. R., Petrova A. S., Ziyatdinova K. A., Salakhov M. Kh. // *J. Phys.: Conf. Ser*, 2015. V. 613. P. 012001.
18. Gainutdinov R. Kh., Khamadeev M. A., Mohebbifar M. R. Mutygullina A. A. // *J. Phys.: Conf. Ser*, 2014. V. 560 P. 012006.
19. Gainutdinov R. Kh.// *Optika i Spektroskopiya*, 1986. V. 60. P. 890
20. Gainutdinov R. Kh. and Moutygoullina A. A. // *Physics of Atomic Nuclei*, 1997. V. 60. P. 841.
21. Gainutdinov R. Kh. and Moutygoullina A. A. // *Physics of Atomic Nuclei*, 1999. V. 62. P. 1905.
22. Gainutdinov R. Kh. and Mutygullina A. A. // *Physics of Atomic Nuclei*, 2002. V. 65. P. 1421.
23. Gainutdinov R. Kh., Mutygullina A. A., Khamadeev M. A. and Petrova A. S. // *J. Phys.: Conf. Ser*, 2013. V. 478. P. 012019
24. Gainutdinov R. Kh., Khamadeev M. A. Mohebbifar M. R. Mutygullina A. A. // *J. Phys.: Conf. Ser*, 2015. V. 613. P. 012002.
25. Gainutdinov R. Kh. and Mutygullina A. A. // *Physica Scripta*, 2009, V. 135. P. 014021.
26. Gainutdinov R. Kh.//*Ukrainskii fizicheskii zhurna*, 1984. V. 29. P. 805.
27. Gainutdinov R. Kh.// *J. Phys. A*, 1989. V.22. P. 269
28. Splettstoesser J., Governale M. and König J.// *Phys. Rev. B*, 2012. V. 86. P. 035432.



УДК 539.1.074.5:620.179.152

**ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ РАЗРЕШЕНИЕ СПЕКТРОМЕТРА НА ОСНОВЕ
НЕОХЛАЖДАЕМОГО Si ПЛАНАРНОГО ДЕТЕКТОРА И ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО
УСИЛИТЕЛЯ С ЕМКОСТНОЙ И РЕЗИСТИВНО-ЕМКОСТНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ****ENERGY RESOLUTION OF THE SPECTROMETER BASED
ON UNCOOLED PLANAR Si DETECTOR AND PRE-AMPLIFIER WITH CAPACITIVE
AND RESISTIVE-CAPACITIVE FEEDBACK****¹А.С. Деев, ^{1,2}А.А. Мазиллов, ¹С.В. Наумов, ¹М.Ю. Шулика****¹O.S. Deiev, ^{1,2}A.A. Mazilov, ¹S.V. Naumov, ¹M.Yu. Shulika**¹ННЦ «Харьковский физико-технический институт», ул. Академическая, 1, г. Харьков, 61108, Украина

NSC "Kharkov Institute of Physics and Technology", 1 Akademicheskaya St, Kharkov, 61108, Ukraine

²Белгородский национальный исследовательский университет, Россия, 308015, г.Белгород, ул. Победы, 85

Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: deev@kipt.kharkov.ua; alexey.mazilov@gmail.com; m_shulika@kipt.kharkov.ua

Ключевые слова: кремниевые планарные детекторы, энергетическое разрешение детектора, фактор Фано

Key words: silicon planar detectors, energy resolution of the detector, Fano factor

Аннотация. Представлены результаты измерений энергии излучения для разработанных в ННЦ ХФТИ одноканальных детектирующих систем на основе кремниевых неохлаждаемых планарных детекторов и спектрометрической считывающей электроники с предварительным усилителем двух типов: с емкостной и резистивно-емкостной обратной связью. В экспериментах применялись источники излучения ⁵⁵Fe, ²⁴¹Am, ⁵⁷Co и характеристическое рентгеновское излучение (ХРИ) элементов от Cu до Pb. Измерены значения FWHM в диапазоне $E_\gamma \sim 4-136$ кэВ.

Resume. It is shown the results of measurements of irradiation energy for developed in NSC KIPT single channel detection systems based on uncooled planar silicon detectors and spectrometric readout electronics with pre-amplifiers of two types: with capacitive and resistive-capacitive feedback. In the experiments there were used radiation sources ⁵⁵Fe, ²⁴¹Am, ⁵⁷Co and characteristic X-ray (CXR) of the elements from Cu to Pb. The values of the FWHM in the range $E_\gamma \sim 4-136$ keV were measured.

ВВЕДЕНИЕ

Кремниевые полупроводниковые детекторы получили широкое распространение в спектрометрии мягкого рентгеновского излучения [1,2]. Значимое место занимают гамма-спектрометрические методы неразрушающего анализа, которые являются более экспрессными, дешевыми и доступными, чем разрушающий химический анализ, требуют меньшей подготовки персонала, проводящего измерения, и не производят каких-либо значительных изменений в состоянии исследуемого материала [3].

Важной динамической характеристикой, существенной для правильной интерпретации результатов измерений спектров рентгеновского излучения, является энергетическое разрешение спектрометра при различных энергиях рентгеновского излучения [4]. Поэтому продолжают исследования энергетического разрешения полупроводниковых рентгеновских спектрометров с различными типами детекторов [4-7].

В настоящей работе, представлены результаты измерений энергетического разрешения (FWHM) спектрометрической системы на основе герметизированного детектирующего модуля (неохлаждаемый Si PIN детектор) и зарядочувствительных усилителей двух типов: с емкостной (C) и резистивной (RC) обратной связью.

1. УСИЛИТЕЛИ С РЕЗИСТИВНО ЕМКОСТНОЙ (RC) И ЕМКОСТНОЙ (C) ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ. МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

На Рис.1 показана схема классического зарядо-чувствительного усилителя, цепь обратной связи которого состоит из высокоомного резистора и конденсатора малой ёмкости. Основным достоинством этой схемы считается простота конструкции. К недостаткам следует отнести избыточный шум резистора обратной связи, большие габариты резистора обратной связи, малая стабильность по усилению заряда. На Рис.2 представлена схема зарядо-чувствительного усилителя со сбросом конденсатора обратной связи. Достоинства этой схемы: отсутствует резистор обратной связи, компактность, минимально низкий шум. Имеются также существенные недостатки: сложность реализации, специальные требования к спектрометрическому усилителю и амплитудному анализатору.

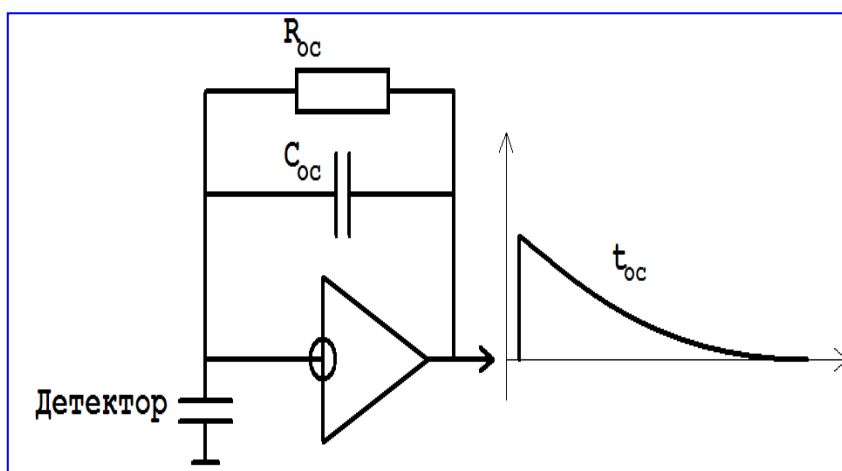


Рис. 1. Схема классического зарядо-чувствительного усилителя с резистивной (RC) обратной связью

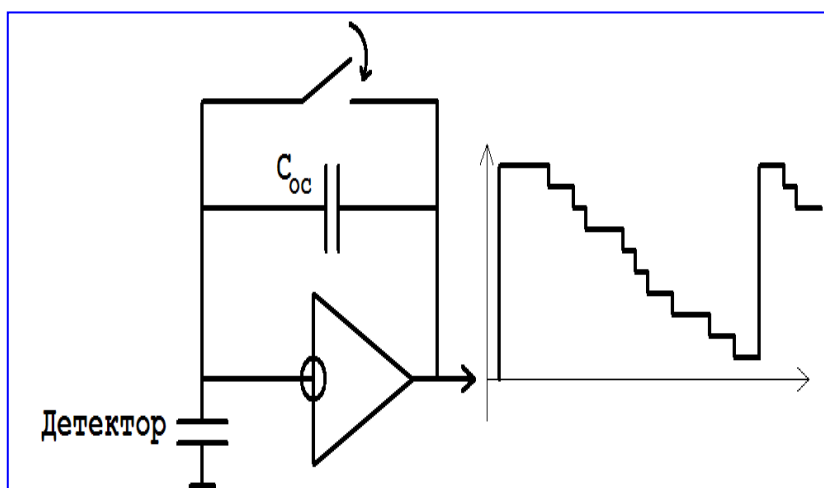


Рис. 2. Схема зарядо-чувствительного усилителя со сбросом конденсатора обратной связи – с емкостной (C) обратной связью

Разработанные и изготовленные в ННЦ ХФТИ герметизированные модули неохлаждаемых планарных кремниевых детекторов [8] и считывающая электроника [9] показали высокую стабильность при использовании в экспериментах физики высоких энергий, ядерно-физических

экспериментах, в устройствах контроля концентрации элементов, в медицинских диагностических устройствах [10-12]. Спектрометрический канал на основе неохлаждаемого Si PIN детектора толщиной $t = 300 \mu\text{m}$ обеспечивает устойчивую регистрацию излучения в диапазоне энергий $E_\gamma = 5...150 \text{ кэВ}$. В [11] рассмотрены вопросы эффективности регистрации квантов различных энергий.

В настоящей работе измерения энергетических спектров выполнены в диапазоне энергий 3,7-136 кэВ с помощью источников излучения ^{241}Am , ^{57}Co , ^{55}Fe и характеристического излучения (ХРИ), возбуждаемого для мишеней Ca, Ti, Fe, Cu, Zn, Ni, Mo, Sn, Ag, Pb. Определено энергетическое разрешение Si детектора (FWHM – полная ширина на полувысоте пика гамма линий) в нормальных условиях. Обработка и разделение линий проведена в Origin 8.

2. СПЕКТРЫ ИЗЛУЧЕНИЯ И FWHM ДЛЯ УСИЛИТЕЛЯ С РЕЗИСТИВНО-ЕМКОСТНОЙ (RC) ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

На Рис.3 представлены экспериментальные спектры для источников гамма-излучения ^{241}Am (ОСГИ – кривая 1, в металлическом корпусе – кривая 2), полученные Si детектором толщиной $300 \mu\text{m}$. Спектры гамма излучения состоят из набора линий (пики полного поглощения) и комптоновского распределения.

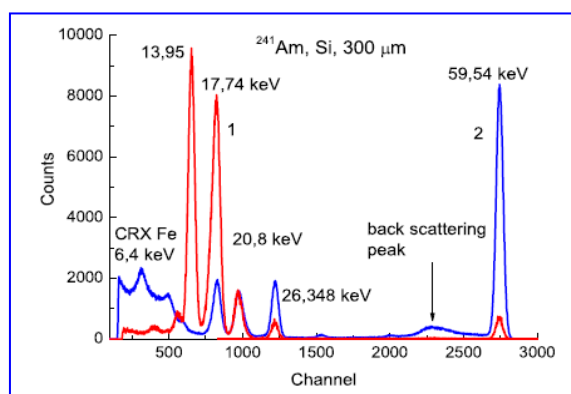


Рис.3. Экспериментальные спектры для источников гамма-излучения ^{241}Am (ОСГИ – кривая 1, в металлическом корпусе – кривая 2), полученные Si детектором толщиной $300 \mu\text{m}$.

На Рис.4 представлены спектры ХРИ для Fe, Pb и Ag. Для Fe линии K_α и K_β не разделены, для Pb измерен L триплет, для Ag линии K_α и K_β разделены.

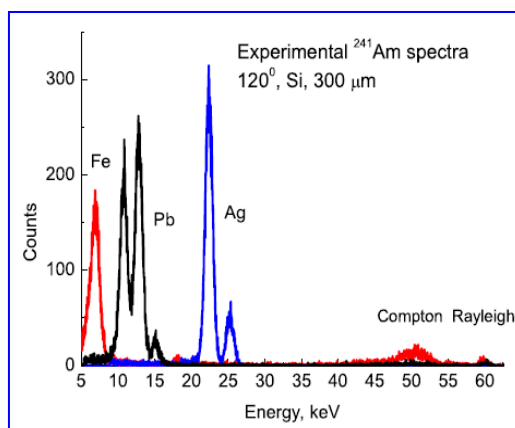


Рис.4. Экспериментальные спектры ХРИ для Fe, Pb и Ag.

На Рис.5 представлен спектр ХРИ от Cu, линии K_α и K_β не разделены, но отчетливо заметна асимметрия пика ХРИ.

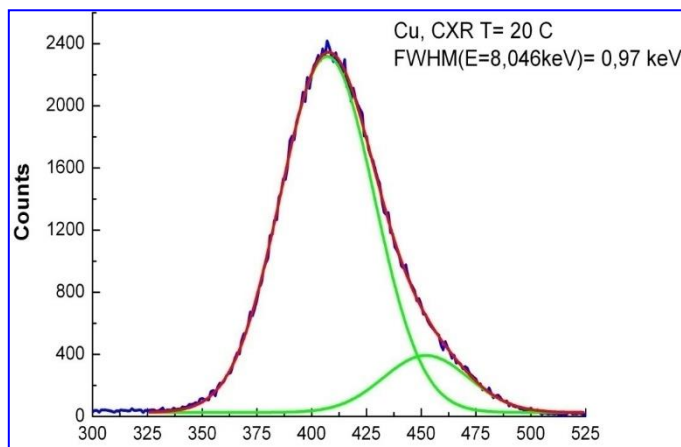


Рис.5. Спектр ХРИ от Cu, линии K_α и K_β не разделены, но отчетливо заметна асимметрия пика ХРИ.

На Рис.6 представлен спектр излучения от источника ^{55}Fe , линии K_α и K_β также не разделяются, заметна асимметрия пика.

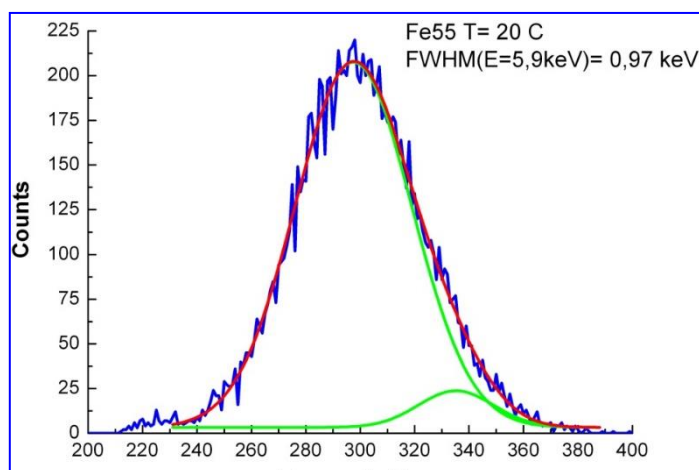


Рис.6. Спектр излучения от источника ^{55}Fe , линии K_α и K_β не разделяются, заметна асимметрия пика.

Результаты по измерению энергетического разрешения для спектрометрической системы с резистивно-емкостной обратной связью (RC) представлены в Табл.1. FWHM в составило 0,97-1,21 кэВ (см. Табл.1), а край фоновых шумов ≤ 2 кэВ. Ошибка определения полуширин не превышала 1-2%. Отметим, что зависимость энергетического разрешения от энергии рентгеновских квантов при комнатной температуре выражена слабо.

Таблица 1. Значения FWHM для спектрометрической системы с резистивно-емкостной обратной связью (RC)

E, keV	3.69	5.9	8.046	15.77	17.47	25.27	26.34	59.54	122.06	136.47
FWHM	0.99	0.97	0.97	0.99	0.98	1.02	1.05	1.10	1.19	1.21

3. СПЕКТРЫ ИЗЛУЧЕНИЯ И FWHM ДЛЯ УСИЛИТЕЛЯ С ЕМКОСТНОЙ (С) ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Изготовлен и оптимизирован экспериментальный образец спектрометрической системы на основе герметизированного детектирующего модуля (неохлаждаемый Si PIN детектор с током утечки 6 пА при температуре 25°C) и зарядочувствительного усилителя с емкостной обратной связью (С).

На Рис.7 показан экспериментальный спектр излучения для источника ^{241}Am (ОСГИ), полученный Si детектором толщиной 300 мкм. Выделены изолированные монолинии с энергией 13.9, 26, 34 и 59.54 кэВ.

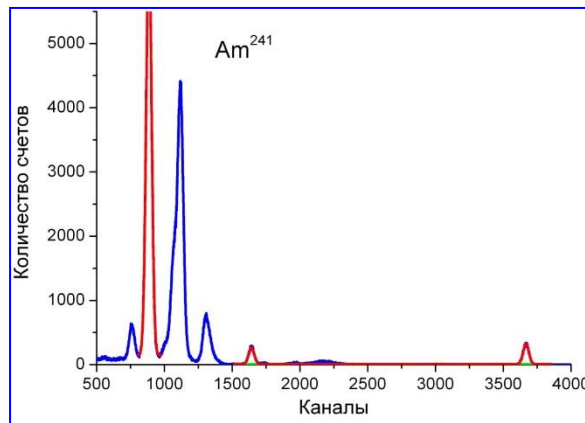


Рис.7. Экспериментальный спектр излучения для источника ^{241}Am (ОСГИ), полученный Si детектором толщиной 300 мкм.

На Рис.8 представлен спектр ХРИ от Cu, линии K_α и K_β не разделены, но асимметрия пика ХРИ выражена более отчетливо, чем на Рис.5.

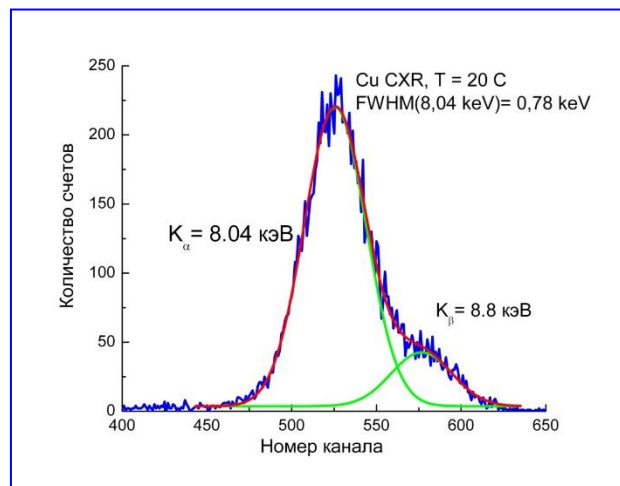


Рис.8. Спектр ХРИ от Cu, линии K_α и K_β не разделены.

На Рис.9 представлен спектр излучения от источника ^{55}Fe . Полученный результат сравним с аналогичным результатом [6].

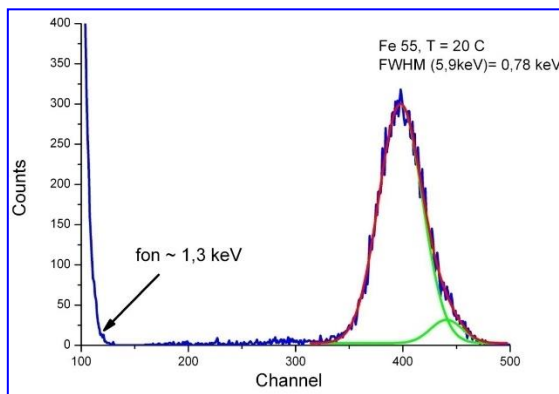


Рис.9. Спектр излучения от источника ⁵⁵Fe.

Результаты по измерению энергетического разрешения для спектрометрической системы с емкостной обратной связью (С) представлены в Табл. 2. FWHM в составило 0,7-0,79 кэВ, а край фоновых шумов ≤1,3 кэВ. Энергетическое разрешение слабо зависит от энергии квантов.

Таблица 2. Значения FWHM для спектрометрической системы с емкостной обратной связью (С)

E, keV	5.9	8.04	8.63	13.9	17.47	26.34	59.54
FWHM	0.78	0.70	0.71	0.76	0.75	0.77	0.79

4. РАЗДЕЛЕНИЕ ФАКТОРА ФАНО ДЕТЕКТОРА И ШУМОВ ЭЛЕКТРОННОГО ТРАКТА

На Рис.10 показана зависимость энергетического разрешения спектрометрического тракта (FWHM), измеренного для спектрометрических систем с зарядочувствительными усилителями двух типов с резистивно-емкостной (RC) и емкостной (С) обратной связью.

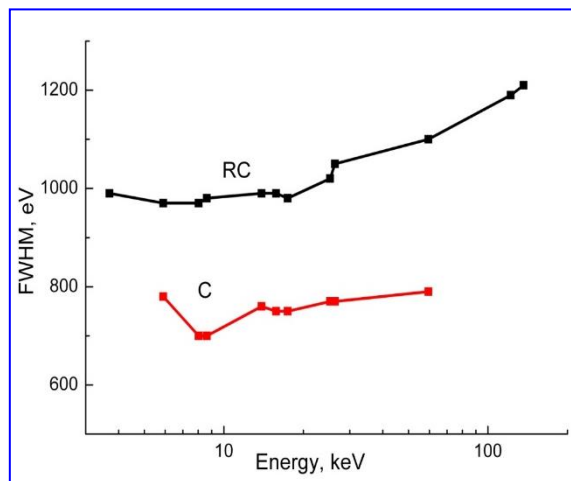


Рис.10. Зависимость энергетического разрешения спектрометрического тракта (FWHM), измеренного для резистивно-емкостной (RC) и емкостной (С) обратной связи.

Разрешение спектрометра можно представить в виде квадратного корня из суммы квадратов разрешения электроники E_{el} и фактора Фано [4]:

$$FWHM = \sqrt{(FWHM)_{el}^2 + 2.35^2 \cdot F \cdot \omega \cdot E}$$

Математическими расчетами можно разделить величины E_{el} и фактора Фано. На Рис.11 эти величины представлены как FWHM electronic для двух типов обратной связи и FWHM Fano.

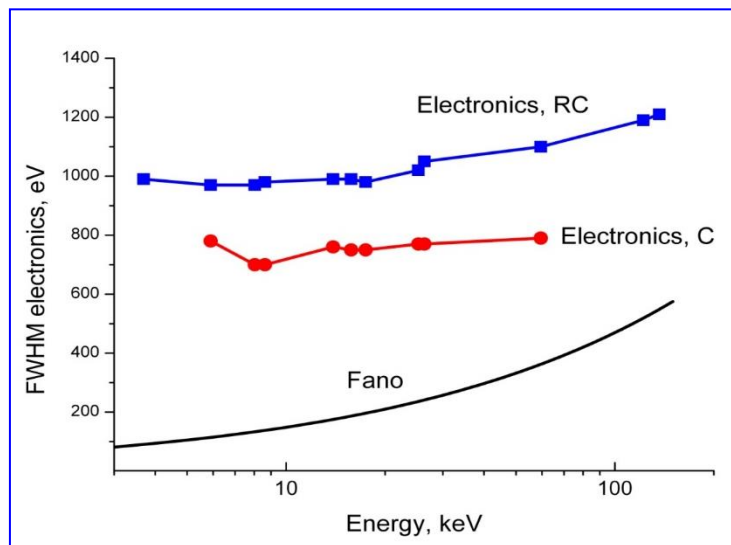


Рис.11. Величины FWHM electronic для двух типов обратной связи и FWHM Fano (нижняя кривая).

Нижняя кривая рассчитана как $FWHM = 2.35 \cdot \sqrt{F \cdot w \cdot E_\gamma}$, $w = 3.63$ eV, $F = 0.11$ (F – фактор Фано), E_γ – энергия квантов. Вклад шумов электроники для RC ~ 1000 eV, для C обратной связи ~ 750 eV.

Как можно видеть, в нашем случае для Si PIN детекторов при комнатной температуре квадрат фактора Фано значительно меньше квадрата шумов электроники. С этим обстоятельством связана слабая зависимость энергетического разрешения от энергии квантов. Аналогичные зависимости получены например, в [6,7].

Выводы

Представлены экспериментальные результаты измерений энергии излучения, полученные на разработанных в ННЦ ХФТИ экспериментальных образцах детектирующих систем на основе неохлаждаемых Si PIN детекторов.

Проведены измерения в диапазоне энергий квантов $E_\gamma = 3-140$ кэВ. Измерены энергетические разрешения FWHM и предельный уровень шумов для спектрометрических систем с зарядочувствительными усилителями двух типов: с резистивно-емкостной (RC) и емкостной (C) обратной связью.

Энергетическое разрешение (FWHM) детектора с усилителем с резистивно-емкостной обратной связью в указанном диапазоне энергий изменяется с увеличением энергии квантов с 0.97 до 1.21 кэВ. Уровень шумов спектрометрической системы не превышает 2 кэВ.

Результаты измеренного энергетического разрешения с усилителем с емкостной обратной связью находились в диапазоне 0,71-0,77 кэВ для $E_\gamma = 5-60$ кэВ, что подтверждает высокие характеристики спектрометрической системы. Уровень шумов системы измерен на уровне $\leq 1,37$ кэВ.

Показано, что при комнатной температуре квадрат фактора Фано значительно меньше квадрата шумов электроники. С этим обстоятельством связана слабая зависимость энергетического разрешения от энергии квантов.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №15-12-10019).

Список литературы

1. Kowalski E. Nuclear electronics, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1970. In Russian translation: E. Ковальский. Ядерная электроника, – М.: Атомиздат., 1972. – 360 с.
2. Акимов Ю.К., Игнатъев О.В., Калинин А.И., Кушнирук В.Ф. Полупроводниковые детекторы в экспериментальной физике. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 344 с.
3. Дуглас Райлли, Норберт Энслин, Хэйстингс Смит, Сара Крайнер. Пассивный неразрушающий анализ ядерных материалов // Пер. с англ. – М.: ЗАО «Издательство БИНОМ», 2000. – 720 с.
4. J. Morse. Energy resolving semiconductor detectors for X-ray spectroscopy // <http://www.esrf.eu/files/live/sites/www/files/Instrumentation/friday-lectures-slides/ESRFtalk201002EDX-Systems.pdf>
5. Leonardo Abbene and Gaetano Gerardi. High Resolution X-Ray Spectroscopy with Compound Semiconductor Detectors and Digital Pulse Processing Systems // <http://cdn.intechopen.com/pdfs-wm/27337.pdf>
6. Hua Feng, Philip Kaaret, Hans Andersson. Double-layer silicon PIN photodiode X-ray detector for a future X-ray timing mission // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, 2006. V. 564. Pp. 347–351.
7. K. Mathieson, R. Bates, G.M. Iles, S. Manolopoulos et al. Simulated and experimental results from a room temperature silicon X-ray pixel detector // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, 2001. V. 460. Pp. 191–196.
8. G.P. Vasilyev, V.K. Voloshin, S.K. Kiprich et al. Encapsulated modules of silicon detectors of ionizing radiation // Problems of atomic science and technology, 2010. № 3. Series: Nuclear Physics Investigations (54). Pp. 200–204.
9. V.I. Kulibaba, N.I. Maslov, S.V. Naumov, V.D. Ovchinnik, I.M. Prokhorets. Readout electronics for multichannel detectors // Problems of Atomic Science and Technology. Ser.:NPI., 2001. №5(39), Pp. 177–179.
10. G.P. Vasiliev, V.K. Voloshyn O.S. Deiev, A.A. Mazilov et al. Radiation dose determination by dual channel spectrometr in energy range 0.005...1 MeV // Problems of atomic science and technology. 2012. №4 (80). Series: Nuclear Physic Investigations (59). p. 205–209.
11. G.L. Bochek, O.S. Deiev, N.I. Maslov, V.K. Voloshyn. X-ray lines relative intensity depending on detector efficiency, foils and cases thickness for primary and scattered spectra // Problems of atomic science and technology, 2011. №3 (73). Series: Nuclear Physic Investigations (55). p. 42–49.
12. G.P. Vasiliev, V.K. Voloshyn, O.S. Deiev et al. Measurement of Radiation Energy by Spectrometric Systems Based on Uncooled Silicon Detectors. // Journal of Surface Investigation. X ray, Synchrotron and Neutron Techniques. 2014. Vol. 8. No. 2. pp. 391–397

References

1. E. Kowalski. Nuclear electronics, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1970. In Russian translation: E. Kowalski. Nuclear electronics, – М.: Atomizdat. – 1972. – 360 p.
2. Y.K. Akimov, O.V. Ignatiev, A.I. Kalinin, V.F. Kushniruk. Semiconductor detectors in experimental physics. – М.: Energoatomizdat. – 1989. – 344 p.
3. Douglas Reilly, Norbert Ensslin, Hastings Smith, Sarah Krayner. Passive nondestructive analysis of nuclear materials // Transl. from eng. – Moscow: ZAO "Publisher BINOM". – 2000. – 720 p.
4. J. Morse. Energy resolving semiconductor detectors for X-ray spectroscopy // <http://www.esrf.eu/files/live/sites/www/files/Instrumentation/friday-lectures-slides/ESRFtalk201002EDX-Systems.pdf>
5. Leonardo Abbene and Gaetano Gerardi. High Resolution X-Ray Spectroscopy with Compound Semiconductor Detectors and Digital Pulse Processing Systems // <http://cdn.intechopen.com/pdfs-wm/27337.pdf>



6. Hua Feng, Philip Kaaret, Hans Andersson. Double-layer silicon PIN photodiode X-ray detector for a future X-ray timing mission // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, 2006. V 564. Pp.347–351
7. K. Mathieson, R. Bates, G.M. Iles, S. Manolopoulos et al. Simulated and experimental results from a room temperature silicon X-ray pixel detector // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, 2001. V. 460. Pp.191–196.
8. G.P. Vasilyev, V.K. Voloshin, S.K. Kiprich et al. Encapsulated modules of silicon detectors of ionizing radiation // Problems of atomic science and technology, 2010. No 3. Series: Nuclear Physics Investigations (54). Pp. 200-204.
9. V.I. Kulibaba, N.I. Maslov, S.V. Naumov, V.D. Ovchinnik, I.M. Prokhorets. Readout electronics for multichannel detectors // Problems of Atomic Science and Technology. Ser.:NPI., 2001. №5(39), Pp. 177-179.
10. G.P. Vasiliev, V.K. Voloshyn O.S. Deiev, A.A. Mazilov et al. Radiation dose determination by dual channel spectrometr in energy range 0.005...1 MeV // Problems of atomic science and technology, 2012. №4 (80). Series: Nuclear Physic Investigations (59). Pp. 205-209.
11. G.L. Bochek, O.S. Deiev, N.I. Maslov, V.K. Voloshyn. X-ray lines relative intensity depending on detector efficiency, foils and cases thickness for primary and scattered spectra // Problems of atomic science and technology, 2011. №3 (73). Series: Nuclear Physic Investigations (55). p. 42-49.
12. G.P. Vasiliev, V.K. Voloshyn, O.S. Deiev et al. Measurement of Radiation Energy by Spectrometric Systems Based on Uncooled Silicon Detectors. // Journal of Surface Investigation. X ray, Synchrotron and Neutron Techniques, 2014. V. 8. No. 2. Pp. 391–397



УДК 539.2, 539.19

**ПРЫЖКОВАЯ ПРОВОДИМОСТЬ В МОНОКРИСТАЛЛАХ $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.4})_3\text{As}_2$
HOPPING CONDUCTIVITY IN $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.4})_3\text{As}_2$ SINGLE CRYSTALS**

**¹В.С.Захвалинский, ¹Т.Б.Никуличева, ²Е.Lähderanta,
³М.А.Шахов, ¹Е.А.Пилук, ¹С.В.Иванчихин
V.S. Zakhvalinskii, T.B. Nikulicheva, E.Lähderanta,
M.A. Shahov, E.A. Pilyuk, S.V. Ivanchihin**

¹Белгородский национальный исследовательский университет, Россия, 308015, г.Белгород, ул. Победы, 85
Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

²Department of Mathematics and Physics, Lappeenranta University of Technology, PO Box 20,
FIN-53852 Lappeenranta, Finland

³Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Россия, 194021, г.Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 26
Ioffe Institute, 26 Politekhnicheskaya, St Petersburg, 194021, Russia
E-mail: zakhvalinskii@bsu.edu.ru

Ключевые слова: монокристаллы, твёрдые растворы, прыжковая проводимость, дираковский полуметалл
Keywords: single crystals, solid solutions, hopping conductivity, Dirac semimetal

Аннотация. Методом Бриджмена получены монокристаллы тетрагональных твёрдых растворов $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.4})\text{As}_2$, пространственная группа $P4_2/nmc$. Проведены измерения температурной зависимости электропроводности и магнетосопротивления в диапазоне температур от 1.6 К до 300 К и в магнитном поле до 20 Тл. Вблизи гелиевых температур установлен диапазон реализации механизма прыжковой проводимости с переменной длиной прыжка по Шкловскому-Эфросу. Определены ширины кулоновской $\Delta = 0.43$ мэВ и жёсткой щели $\delta = 0.025$ мэВ в плотности локализованных состояний, концентрация и радиус локализации носителей заряда.

Resume. Tetragonal single crystals of solid solutions $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.4})\text{As}_2$, space group $P4_2/nmc$ were obtained by the Bridgman method. The temperature dependence of the electrical conductivity and the magnetoresistance of temperature range from 1.6 K to 300 K in a magnetic field up to 20 T were performed. The region of realization of the variable range hopping mechanism of Shklovsky-Efros near the helium temperatures was established. Was determined the width of the Coulomb gap $\Delta = 0.43$ meV and rigid gap $\delta = 0.025$ meV in the density of localized states, the concentration and localization radius of the charge carriers.

Введение

Твёрдые растворы $(\text{Cd}_{1-x}\text{Zn}_x)_3\text{As}_2$ привлекают внимание исследователей возможностью изменения ширины запрещенной зоны полупроводниковых материалов в зависимости от состава в интервале от -0.2 до 1 эВ [1], что делает их перспективными материалами электроники. Области применения являются приемники и источники ИК-диапазона спектра, термоэлементы [2], датчики Холла [3] и высокоэффективные источники инфракрасного излучения [4]. Возросший интерес к Cd_3As_2 и твёрдым растворам на его основе связан с тем, что согласно теоретическим [5] и экспериментальным [6] исследованиям арсенид кадмия является дираковским полуметаллом (ДП). В монокристаллах Cd_3As_2 закон дисперсии квазичастиц является линейным по всем трем направлениям пространства импульсов. Вследствие этого наблюдаются такие эффекты как квантовый спиновый эффект Холла, гигантский диамагнетизм, невосприимчивость дираковских фермионов к спин-орбитальному взаимодействию. В монокристаллах твёрдых растворов $(\text{Cd}_{1-x}\text{Zn}_x)_3\text{As}_2$ экспериментально наблюдался фазовый переход от дираковского полуметалла к полупроводнику (ПП) с ростом содержания Zn. Точке перехода ДП-ПП соответствовал состав $x=0.38$ [7].

Целью настоящей работы было исследование механизмов электропроводности при низких температурах в монокристаллах $(\text{Cd}_{1-x}\text{Zn}_x)_3\text{As}_2$ ($x=0.4$) близких к составу концентрационного фазового перехода ДП-ПП.



Эксперимент

Монокристаллы $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.4})_3\text{As}_2$ были получены модифицированным методом Бриджмена.

Предварительно были синтезированы бинарные соединения из чистых (99.999 %) Cd, Zn и As. Синтез проводился в графитизированных и вакуумированных кварцевых ампулах. Образцы Cd_3As_2 и Zn_3As_2 были подвергнуты перегонке в паровой фазе под действием градиента температуры в вакуумированных кварцевых ампулах. Полученные возгонкой в паровой фазе монокристаллы Cd_3As_2 и Zn_3As_2 были использованы для получения монокристаллов твёрдого раствора $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.4})\text{As}_2$, модифицированным методом Бриджмена из стехиометрических количеств Cd_3As_2 и Zn_3As_2 . Навеска $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.4})_3\text{As}_2$ составила 20 г. Материал был помещён в вакуумированные и графитизированные кварцевые ампулы, заключённые в дополнительный вакуумный чехол. Материал в ампуле нагревался выше точки плавления до $T = 900^\circ\text{C}$, выдерживался при этой температуре в течение 4 часов и затем медленно охлаждался в присутствии градиента температуры $1.5^\circ\text{C}/\text{см}$ со скоростью $5^\circ\text{C}/\text{ч}$ до температуры 700°C . Дальнейшее охлаждение до комнатной температуры производилось в режиме выключенной печи. Рост кристаллов проходил в лабораторной трубчатой печи резистивного нагрева. Были получены слитки с объёмом монокристаллических блоков более 1 см^3 .

Монокристаллический блок был подвергнут микронзондовому элементному анализу состава в сканирующем электронном микроскопе QUANTA 600, методом энергодисперсионной рентгеновской спектроскопии (EDX) установлено соответствие состава загрузки составу монокристалла $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.4})\text{As}_2$ в пределах точности метода, ориентируясь на наиболее достоверный результат по Cd.

Рентгенофазовый анализ проводился на дифрактометре ДРОН-УМ (Fe K_α – излучение, $\lambda = 1.93604 \text{ \AA}$, $\theta - 2\theta$ – метод). Определение индексов Миллера и уточнение параметров элементарной ячейки проведено на базе данных о кристаллической структуре α' - Cd_3As_2 (пространственная группа $P4_2/nmc$) [8]. Все исследованные образцы монокристаллов $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.4})\text{As}_2$ имели тетрагональную сингонию, пространственная группа $P4_2/nmc$.

Температурная зависимость электропроводности и магнетосопротивления монокристаллов $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.4})\text{As}_2$ исследовались на установке импульсного магнитного поля по шестизондовой схеме в диапазоне температур от 1.6 К до 300 К и в магнитных полях до 20 Тл.

Результаты и их обсуждение

На рисунках 1 и 2 приведены результаты экспериментального исследования температурной зависимости удельного сопротивления и магнетосопротивления монокристаллов $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.4})\text{As}_2$.

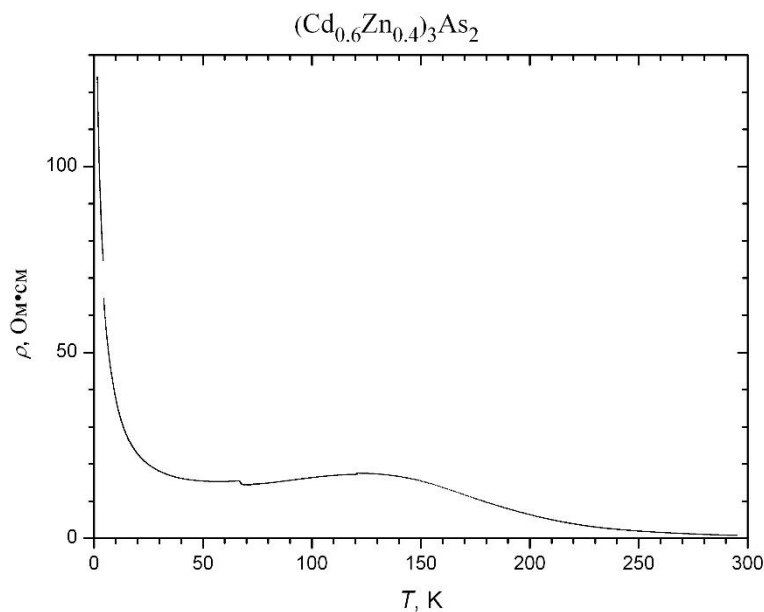


Рис. 1. Температурная зависимость удельного сопротивления монокристалла $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.4})_3\text{As}_2$.

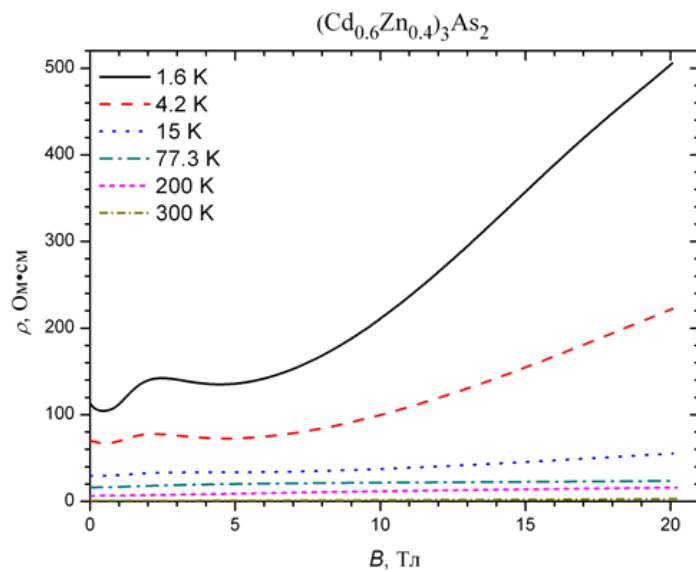


Рис. 2. Магнетосопротивление монокристалла $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.4})_3\text{As}_2$ в диапазоне температур от 1.6 К до 300 К.

С целью определения механизма проводимости образца $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.4})_3\text{As}_2$ в области температур близких к гелиевым был проведен анализ температурной зависимости удельного сопротивления [9]:

$$\rho(T) = \rho_0 \exp[E_A / (kT)] , \tag{1}$$

где ρ_0 – предэкспоненциальный множитель, E_A – энергия активации, k – постоянная Больцмана.

Прыжковую проводимость можно описать в соответствии с универсальным законом [10]:

$$\rho(T) = DT^m \exp(T_0 / T)^p , \tag{2}$$



где D – константа и T_0 – характеристическая температура, которые зависят от механизма прыжковой проводимости: $p = 1$ – соответствует прыжковой проводимости по ближайшим соседям (ППБС), $p = 1/4$ – прыжковой проводимости с переменной длиной прыжка (ПППДП) типа Мотта, и $p = 1/2$ – ПППДП типа Шкловского-Эфроса (ШЭ).

К энергетическим параметрам, существенным для ПППДП перемещения заряда малых поляронов, характеризующих особенности спектра плотности локализованных состояний (ПЛС) вблизи уровня Ферми с энергией μ относятся мягкая кулоновская щель с шириной Δ , обусловленная кулоновским взаимодействием электронов в неупорядоченных материалах [9], и жёсткая щель $\delta < \Delta$, связанная с конечной работой, необходимой электрону для уничтожения промежуточной поляризации в начальном состоянии и для её создания в конечном состоянии во время прыжка [10,11]. ПППДП типа Мотта, характеризуемая значением $p = 1/4$ в уравнении (2), возникает, когда ширина полосы оптимальной энергии ε_{\max} превышает Δ , в противном случае (и если $\delta = 0$) имеет место ПППДП проводимость Шкловского-Эфроса, характеризуемая значением $p = 1/2$ [9, 12]. Значение T_0 в уравнении (2), в зависимости от типа проводимости, может быть записано в виде:

$$T_{0M} = \frac{\beta_M}{kg(\mu)a^3}, \quad T_{0SE} = \frac{\beta_{SE}e^2}{\kappa ka}, \quad (3)$$

Здесь $g(\mu)$ – плотность локализованных состояний (ПЛС) вблизи уровня Ферми μ , a – радиус локализации носителя заряда, κ – диэлектрическая проницаемость, $\beta_M = 21$, $\beta_{SE} = 2.8$ [9].

ПППДП типа Мотта имеет место в случае, когда ПЛС вблизи уровня Ферми является постоянной и конечной [12]. Наличие кулоновской щели приводит к ПППДП ШЭ [9]. ПЛС, содержащая как мягкую параболическую кулоновскую щель Δ , так и жёсткую щель δ , равна $g(\varepsilon) = 0$ для $\mu - \delta < \varepsilon < \mu + \delta$, $\alpha(\kappa^3/e^6)(\varepsilon - \mu + \delta)^2$ для $\mu - \Delta < \varepsilon < \mu - \delta$, $\alpha(\kappa^3/e^6)(\varepsilon - \mu - \delta)^2$ для $\mu + \delta < \varepsilon < \mu + \Delta$ и g_0 для $\varepsilon < \mu - \Delta$ и $\varepsilon > \mu + \Delta$, где g_0 – величина ПЛС вне щели и $\alpha = 3/\pi$. ПЛС $g(\varepsilon)$ является симметричной вокруг уровня Ферми и при $\delta = 0$ совпадает с ПЛС, которая содержит только кулоновскую щель [9].

Механизм прыжковой проводимости характеризуется значением параметра p в уравнении (2). С другой стороны, не менее важной является температурная зависимость множителя, стоящего в начале уравнения и заданная степенной зависимостью от m . Поэтому необходимо независимое одновременное определение обоих параметров m и p . Учитывая, что локальная энергия активации, $E_a \equiv d \ln \rho / d(kT)^{-1}$ [9], можно переписать уравнение (2) в виде

$$\ln[E_a / (kT) + m] = \ln p + p \ln T_0 p + \ln(1/T). \quad (4)$$

Видно, что для определённого режима прыжковой проводимости левая часть уравнения (4) является линейной функцией от $\ln(1/T)$ при заданном значении m , и значение параметра p можно определить по наклону графика $\ln[E_a / (kT) + m]$ от $\ln(1/T)$ (рис. 3).

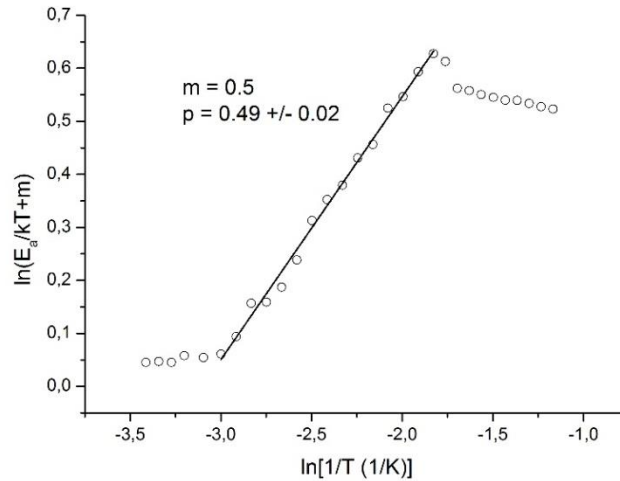


Рис. 3. Зависимость $\ln(E_a/kT + m)$ от $\ln(1/T)$ образца $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.4})_3\text{As}_2$.

Анализ типа прыжковой проводимости можно провести следующим образом. Полагая в уравнении (4) $m = 1/2$ получаем для образца $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.4})_3\text{As}_2$ значение p , близкие к $1/2$ ниже температуры начала прыжковой проводимости с переменной длиной прыжка $T_b \approx 4,5$ К, что характерно для ПППДП ШЭ (рис.3).

Построим зависимость $\ln(\rho/T^{1/2})$ от $T^{-1/2}$. Анализируя эту кривую, можно найти протяженный линейный интервал низких температур. В соответствии с уравнением (2) это также позволяет сделать предположение о типе механизма ПППДП. Следовательно, в образце $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.4})_3\text{As}_2$ реализуется ПППДП ШЭ. Значения D и T_{0SE} находятся из линейных участков рис.3–4 и приведены в таблице 1. Энергия активации E_A может быть определена из линейного участка зависимости $\ln \rho$ от T^{-1} в уравнении (1) при температурах ниже $\sim 4,5$ К, при условии, что коэффициент ρ_0 слабо зависит от T [9]. Значения ρ_0 и E_A приведены в таблице 1.

Таблица 1.

ρ_0 (Ом·см)	E_A (мэВ)	D (Ом·см·К ^{-1/2})	T_0 (К)
0.0114	3.26	0.8127	23.828

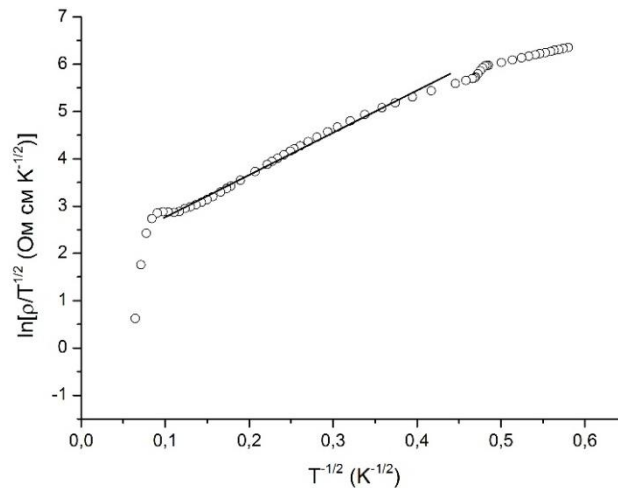


Рис. 4. ПППДП типа Шкловского-Эфроса.

В слабых полях для механизма прыжковой проводимости типа Шкловского-Эфроса выполняется квадратичная зависимость $\ln \rho$ от B^2 [9]. Как видно из рис. 5 участок зависимости $\ln \rho$ от B^2 ниже ~ 3.1 Тл хорошо аппроксимируется линейной функцией.

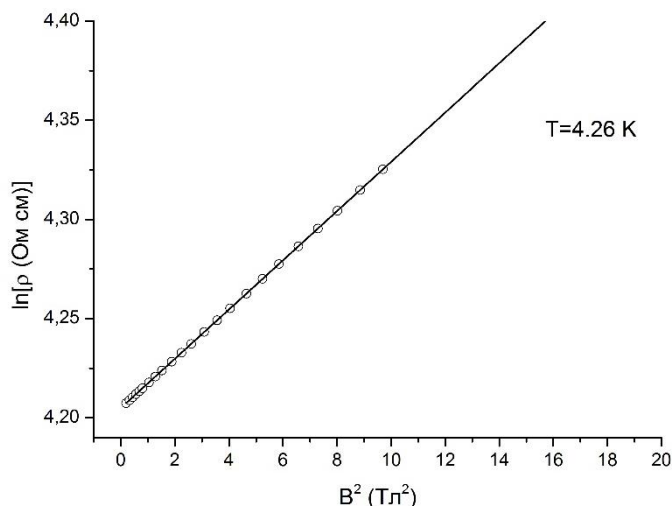


Рис. 5. Определение линейного участка по закону $\ln(\rho) \sim B^2$, $B \sim 3$ Тл.

Данные, полученные при $B = 0$ Тл и в слабых полях, рассмотренные выше, позволяют определить различные микроскопические параметры, такие как радиус локализации носителя заряда, диэлектрическая проницаемость, плотность локализованных состояний, ширина кулоновской щели, что позволяет проверить сделанные выводы о механизмах прыжковой проводимости [13,15].

Из уравнения

$$\Delta \approx \frac{k}{2} \sqrt{T_{VSE} T_{OSE}}, \quad (5)$$

найдем ширину мягкой кулоновской щели [9]. Затем из выражения $\Delta \approx U$, где $U = \frac{e^2}{\kappa R_h}$ – энергия

кулоновского отталкивания между дырками, находящимися на среднем расстоянии

$R_h = \left(\frac{4\pi p_{77}}{3} \right)^{-1/3}$, может быть найдена κ . Здесь p_{77} – холловская концентрация носителей заряда

при $T = 77$ К в полях ниже 0.1 Тл. Вне кулоновской щели [9] и вблизи уровня Ферми [12] ПЛС может быть определена из выражений:

$$g_0 = \frac{3\kappa^3 (\Delta - \delta)^2}{\pi e^6}, \quad g(\mu) = \frac{N_A}{2k(T_{VM}^3 T_{OM})^{1/4}}. \quad (6)$$

При ПППДП моттовского типа и ПППДП типа ШЭ в легированных полупроводниках величины $g(\mu)$ и g_0 оказываются близкими по значению [16]. Это позволяет определить T_{OM} из уравнения (1) и δ из уравнения (6) при $g(\mu) \approx g_0 \equiv g$.

Ширина кулоновской щели в ПЛС уровня Ферми определяется в соответствии со следующим выражением:

$$W = \frac{N_A}{2g_0} + \frac{2}{3}\Delta. \quad (7)$$

П значения Δ , δ , κ , a , W и g для образца $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.4})_3\text{As}_2$ указаны в таблице 2.

Таблица 2.

N_A (10^{16} см^{-3})	a (Å)	κ	Δ (мэВ)	W (мэВ)	g ($10^{16} \text{ см}^{-3} \text{ мэВ}^{-1}$)	δ (мэВ)
1.14	377	52	0.43	0.72	1.32	0.025

Соотношения между значениями Δ и ширины зоны локализованных состояний W согласуются с соответствующими механизмами проводимости при $B = 0$ Тл. Ширина кулоновской щели Δ имеет около половины ширины акцепторной зоны W , что соответствует режиму ПППДП ШЭ.

Заключение

Установлено, что монокристаллы $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.4})_3\text{As}_2$, полученные модифицированным методом Бриджмена, относились к тетрагональной сингонии, пр. гр. $R42/nmc$, $a = b = 8.61(4)$ Å, $c = 12.25(7)$ Å. Проведено исследование температурных зависимостей электропроводности образца $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.4})_3\text{As}_2$ в диапазоне температур 1.6 – 300 К и магнетосопротивления в магнитных полях до 20 Тл. Обнаружено, что при $B = 0$ Тл в интервале температур 4.5 – 20 К преобладает механизм прыжкового переноса заряда с переменной длиной прыжка по типу проводимости Шкловского-Эфроса. В полях до ~ 3.1 Тл удельное сопротивление подчиняется закону $\ln(\rho) \sim B^2$, что дополнительно подтверждает существование прыжковой проводимости по механизму Шкловского – Эфроса. Из анализа температурной зависимости удельного сопротивления $\rho(T)$ были определены значения микроскопических параметров: ширина кулоновской щели $\Delta = 0.43$ мэВ, жёсткой щели $\delta = 0.025$ мэВ, ширина зоны локализованных состояний $W = 0.72$ мэВ, радиус локализации носителей заряда $a = 377$ (Å) что не противоречит литературным данным и подтверждает наш вывод о типе прыжковой проводимости.

Работа поддержана грантом на проведение научно-исследовательских работ по приоритетным направлениям социально-экономического развития Белгородской области и РФФИ проект № 15-42-03192.

Список литературы

1. Wagner R.J., Palic E.D., Swiggard T.M. Interband Magneto-absorption in $\text{Cd}_{3-x}\text{Zn}_x\text{As}_2$ and $\text{Cd}_3\text{AsP}_{2-x}$ // J. Phys. Chem. Solids Suppl, 1971. No. 1. 471. 1971.
2. Kierski A., Termomagnetic effects in II V narrow – gap semiconducting compounds // Acta Phys. Pol. A, 1988. V. 73. P.311.
3. Маренкин С.Ф., Фосфиды и арсениды цинка и кадмия / Маренкин С.Ф и Трухан В.М. / Монография. Минск. «Научно-Практический Центр Национальной академии Наук Беларуси по Материаловедению», 2010.
4. D.K. Harris, P.M. Allen, H.-S. Han, B.J. Walker, J. Lee, M.G. Bawendi. Synthesis of Cadmium Arsenide Quantum Dots Luminescent in the Infrared // J. Am. Chem. Soc., 2011. V. 133. P.4676.



5. Z. Wang, H. Weng, Q. Wu, X. Dai, Z. Fang. Three-dimensional Dirac semimetal and quantum transport in Cd_3As_2 // *Phys. Rev. B*, 2013. V. 88. P. 125427.
6. S. Borisenko, Q. Gibson, D. Evtushinsky, V. Zabolotnyy, B. Buchner, R.J. Cava. Experimental Realization of a Three-Dimensional Dirac Semimetal // *Phys. Rev. Lett.*, 2014. V. 113. P. 027603.
7. Hong Lu, Xiao Zhang, and Shuang Jia, Topological Phase Transition in Single Crystals of $(\text{Cd}_{1-x}\text{Zn}_x)_3\text{As}_2$ // arXiv:1507.07169v1 [cond-mat.mtrl-sci], 2015. V. 26.
8. ICSD Database, Version 2009-1, Ref. code 23245.
9. Шкловский Б.И. Электронные свойства легированных полупроводников / Б.И. Шкловский и А.Л. Эфрос // Монография. – М.: Наука, 1979.
10. Laiho R., Lisunov K.G., Lähderanta E., Petrenko P.A., Salminen J., Shakhov M.A., Safontchik M.O., Stamov V.S., Shubnikov M.V., Zakhvalinskii V.S. Variable-range hopping conductivity in $\text{La}_{1-x}\text{Ca}_x\text{Mn}_{1-y}\text{Fe}_y\text{O}_3$: evidence of a complex gap in density of states near the Fermi level // *J. Phys.: Condens. Matter*, 2002. V. 14. P.8043.
11. Biswas A, Elizabeth S., Raychaudhuri A.K., Bhat H.L. Density of states of hole-doped manganites: a scanning tunneling-microscopy/spectroscopy // *Phys. Rev. B*, 1999. V. 59. P. 5368 .
12. Mott N.F. and E.A.Davis, *Electron Processes in Non-Crystalline Materials*. –Oxford University Press, New York. , 1979
13. Laiho R., Lashkul A.V., Lisunov K.G., Lähderanta E., Shakhov M.A., Zakhvalinskii V.S. Hopping conductivity of Ni-doped p-CdSb // *J. Phys.: Condens. Matter*, 2008. V. 20. P. 295204.
14. Lisunov K.G., Arushanov E., Thomas G.A., Bucher E., Schön J.H. Variable-range hopping conductivity and magnetoresistance in n-CuGaSe₂ // *J. Appl. Phys.*, 2000, V. 88. P. 4128.
15. Lisunov K., Arushanov E., Kloc Ch., Malang U., Bucher E. Hopping conductivity in p-type $\beta\text{-FeSi}_2$ // *Phys.Stat.Sol. (b)*, 2996. V. 195. P. 227.
16. Arushanov E, Lisunov K.G., Vinzelberg H, Behr G, Schumann J. Transport properties of Co-doped beta- FeSi_2 single crystals // *J. Appl. Phys.*, 2006. P. 113704.

References

1. Wagner R.J., Palic E.D., Swiggard T.M. Interband Magneto-absorption in $\text{Cd}_{3-x}\text{Zn}_x\text{As}_2$ and $\text{Cd}_3\text{AsP}_{2-x}$ // *J. Phys. Chem. Solids Suppl.*, 1971. No. 1. P. 471.
2. Kierski A., Termomagnetic effects in II V narrow – gap semiconducting compounds // *Acta Phys. Pol. A*, 1988. V. 73. P.311.
3. S.F. Marenkin, V.M. Trukhan./ Fosfidi i arsenide cinka i kadmija / Monograph. Minsk. "Scientific and Practical Center of the National Academy of Sciences of Belarus on materials", 2010 (in Russian).
4. D.K. Harris, P.M. Allen, H.-S. Han, B.J. Walker, J. Lee, M.G. Bawendi. Synthesis of Cadmium Arsenide Quantum Dots Luminescent in the Infrared // *J. Am. Chem. Soc.*, 2011. V. 133. P. 4676.
5. Z. Wang, H. Weng, Q. Wu, X. Dai, Z. Fang. Three-dimensional Dirac semimetal and quantum transport in Cd_3As_2 // *Phys. Rev. B*, 2013. V. 88. P. 125427.
6. S. Borisenko, Q. Gibson, D. Evtushinsky, V. Zabolotnyy, B. Buchner, R.J. Cava. Experimental Realization of a Three-Dimensional Dirac Semimetal // *Phys. Rev. Lett.*, 2014. V.113. P. 027603.
7. Hong Lu, Xiao Zhang, and Shuang Jia, Topological Phase Transition in Single Crystals of $(\text{Cd}_{1-x}\text{Zn}_x)_3\text{As}_2$ // arXiv:1507.07169v1 [cond-mat.mtrl-sci] 26 Jul 2015.
8. ICSD Database, Version 2009-1, Ref. code 23245.
9. Shklovskii B.I., Efros A.L. *Electronic Properties of Doped Semiconductors*. – Berlin: Springer, 1984.
10. Laiho R., Lisunov K.G., Lähderanta E., Petrenko P.A., Salminen J., Shakhov M.A., Safontchik M.O., Stamov V.S., Shubnikov M.V., Zakhvalinskii V.S. Variable-range hopping conductivity in $\text{La}_{1-x}\text{Ca}_x\text{Mn}_{1-y}\text{Fe}_y\text{O}_3$: evidence of a complex gap in density of states near the Fermi level // *J. Phys.: Condens. Matter*, 2002. V. 14. P. 8043.
11. Biswas A, Elizabeth S., Raychaudhuri A.K., Bhat H.L. Density of states of hole-doped manganites: a scanning tunneling-microscopy/spectroscopy // *Phys. Rev. B*, 1999. V. 59. P 5368.
12. Mott N.F. and Davis E.A., *Electron Processes in Non-Crystalline Materials*. Oxford University Press, New York., 1979
13. Laiho R., Lashkul A.V., Lisunov K.G., Lähderanta E., Shakhov M.A., Zakhvalinskii V.S. Hopping conductivity of Ni-doped p-CdSb // *J. Phys.: Condens. Matter*, 2008. V. 20. P. 295204.
14. Lisunov K.G., Arushanov E., Thomas G.A., Bucher E., Schön J.H. Variable-range hopping conductivity and magnetoresistance in n-CuGaSe₂ // *J. Appl. Phys.*, 2000. V. 88. P. 4128.
15. Lisunov K., Arushanov E., Kloc Ch., Malang U., Bucher E. Hopping conductivity in p-type $\beta\text{-FeSi}_2$ // *Phys.Stat.Sol. (b)*, 1996. V. 195. P. 227.



16. Arushanov E, Lisunov K.G., Vinzelberg H, Behr G, Schumann J. Transport properties of Co-doped beta-FeSi₂ single crystals // J. Appl. Phys., 2006. P. 113704.



УДК 537.8

**DYNAMIC THEORY COHERENT X-RAY RADIATION BY BEAM
OF RELATIVISTIC ELECTRONS IN SINGLE-CRYSTAL****S.V. Blazhevich, A.V. Noskov***Belgorod State University, Belgorod, Russia.
E-mail: noskovbupk@mail.ru**Key words: Relativistic electron; Parametric X-radiation; Diffracted transition radiation*

Resume. The dynamic theory of coherent X-ray radiation by divergent beam of relativistic electrons crossing a single-crystal plate has been developed in Bragg scattering geometry. Numerical calculations of parametric X-ray and diffracted transition radiation angular densities has been made using their averaging by two-dimensional Gauss distribution as the angular distribution of electrons in the beam. It has been shown that the influence of divergence of the high-energy electron beam on DTR is much stronger than on PXR.

1. Introduction

In the physics of interaction of relativistic electrons with matter, to know spatial and angular distributions of particles in the incident beam is important for the experimental data interpretation. That is why working out the express methods to get information about the characteristics of the beam used in the experiment is actual problem. One of the approaches is to use different types of radiation excited by relativistic charged particles in matter. The possibility of the use of parametric X-radiation (PXR) for the diagnostics of relativistic electron beams recently was experimentally studied in [1, 2]. In [3] it was suggested to use PXR generated in a thin crystal to get operative information on spatial position of relativistic electron beam. The applicability of transition radiation (TR) of vacuum ultraviolet range to measure the electron beam cross dimensions was demonstrated in [4]. The authors of [5] offer the use of X-ray Cherenkov radiation by ultrarelativistic charged particles in the photon energy range, which includes K-absorption edges for some of the materials, to reveal the beam cross-dimensions.

In all of the works above listed, the beam parameters estimation was carried out in the framework of kinematic PXR theory, therefore studying the influence of dynamic effects on the characteristics of coherent radiation by relativistic electron beams remains an important task.

As known PXR appears due to the scattering of a relativistic electron Coulomb field on a system of parallel crystal atomic planes [6-8]. When a charged particle crosses the crystal plate surface, the transition radiation (TR) takes place [9, 10]. TR appearing on the border diffracts then on a system of parallel atomic planes of the crystal that forms DTR in a narrow spectral range [11-14]. DTR photons move near the Bragg scattering direction. The process of coherent X-ray radiation by a single relativistic electron in a crystal is described in the framework of the dynamical theory of x-rays diffraction in [15-18]. In these papers, the dynamic theory of coherent X-ray radiation generated by a relativistic electron in a crystal has been built for general case of asymmetric relative to the crystal (target) surface reflection of the electron Coulomb field. In this case, the system of the parallel reflecting atomic planes in the target can be located at arbitrarily given angle to the target surface. Under these conditions, coherent X-radiation in the direction of the Bragg scattering appears because of two coherent radiation mechanisms, namely PXR and DTR. In work [19] dynamical theory of coherent X-ray radiation generated in a single-crystal target by the finite divergence beam of relativistic electrons has been developed in the scattering Laue geometry. The significant difference of the effects of electron beam divergence in PXR and DTR is shown. The

possibilities of practical use of DTR from a single-crystal target for indication of beam divergence of ultrarelativistic electrons are investigated.

In the present work, a dynamical theory of coherent X-ray radiation generated in a single-crystal target by a divergent beam of relativistic electrons is developed in the scattering Bragg geometry. We have obtained the expressions describing spectral-angular distributions of PXR and DTR generated by a relativistic electron moving rectilinearly through the crystal plate at a predetermined angle relative to the axis of the electron beam. Further on the expression for the spectral-angular density of the radiation generated by an electron beam has been derived using the averaging of the radiation cross section over the angular distribution of electrons moving in straight lines in the beam. The influence of the electron beam divergence on spectral and angular characteristics of the coherent radiation has been investigated. One of the goals of this paper is to demonstrate a significant effect of reduction of DTR contribution under increase of the electron beam divergence. This effect allows investigating PXR of a relativistic electron beam in a single crystal target without DTR background. Another goal of this work is to define the possibilities of indication of electron beam divergence in accelerators with use of DTR. It is important to note that the effect of the beam divergence in the considered coherent radiation does not depend on cross sizes of the electron beam at the target-radiator.

2. Radiation amplitude

Let us consider a beam of relativistic electrons crossing a monocrystalline plate (Fig.1). Let us involve the angular variables Ψ , θ and θ_0 in accordance with the definition of relativistic electron velocity \mathbf{V} and unit vectors in direction of momentum of the photon radiated in the direction near electron velocity vector \mathbf{n} and in the of Bragg scattering direction \mathbf{n}_g :

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \left(1 - \frac{1}{2}\gamma^{-2} - \frac{1}{2}\psi^2 \right) \mathbf{e}_1 + \psi, & \mathbf{e}_1 \psi &= 0 \\ \mathbf{n} &= \left(1 - \frac{1}{2}\theta_0^2 \right) \mathbf{e}_1 + \theta_0, & \mathbf{e}_1 \theta_0 &= 0, & \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 &= \cos 2\theta_B, \\ \mathbf{n}_g &= \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2 \right) \mathbf{e}_2 + \theta, & \mathbf{e}_2 \theta &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

θ – is the radiation angle, counted from direction of axis of radiation detector \mathbf{e}_2 , Ψ – is the incidence angle of an electron in the beam counted from the electron beam axis \mathbf{e}_1 , θ_0 – is the angle between the incident photon movement direction and axis \mathbf{e}_1 , ψ_0 – is the divergence of the beam of radiating electrons, $\gamma = 1/\sqrt{1-V^2}$ - Lorentz-factor of the particle, θ_B – is the angle between the electron velocity and the system of crystallographic planes (Bragg angle), δ – is the angle between the input surface of the target and the crystallographic plane, $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$, $\mathbf{k}_g = k_g\mathbf{n}_g$ - are the wave vectors of the radiated photons.

The angular variables are decomposed into the components parallel and perpendicular to the figure plane: $\theta = \theta_{\parallel} + \theta_{\perp}$, $\theta_0 = \theta_{0\parallel} + \theta_{0\perp}$, $\psi = \psi_{\parallel} + \psi_{\perp}$.

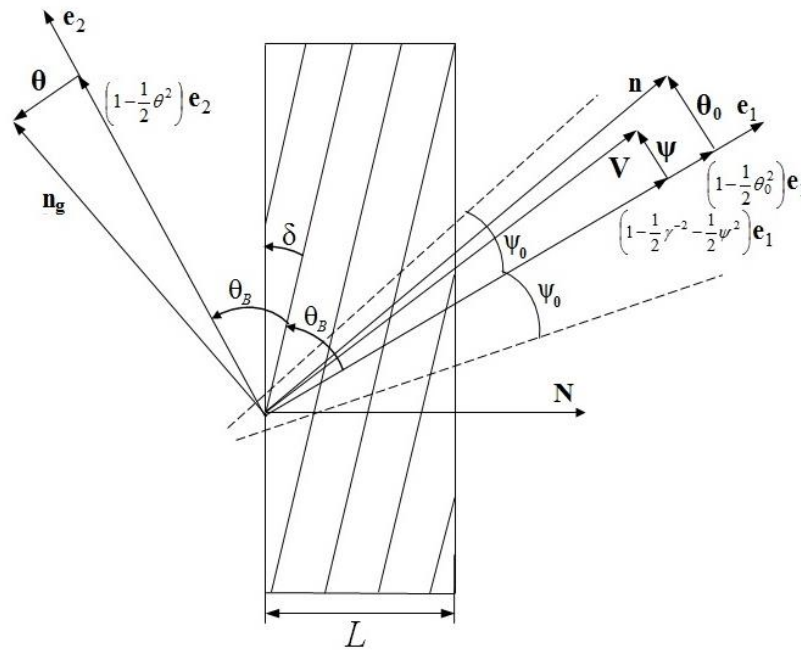


Рис.1 Geometry of the emission process

Let us consider electromagnetic processes in the crystalline medium characterized by complex permittivity

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{r}) = 1 + \chi(\omega, \mathbf{r}), \quad (2)$$

where $\chi(\omega, \mathbf{r}) = \chi_0(\omega) + \sum_{\mathbf{g}}' \chi_{\mathbf{g}}(\omega) \exp(i\mathbf{g}\mathbf{r})$, $\chi(\omega, \mathbf{r})$ is the dielectric susceptibility,

$\chi_{\mathbf{g}}(\omega) = \chi_{\mathbf{g}}'(\omega) + i\chi_{\mathbf{g}}''(\omega)$ is the Fourier coefficient of the expansion of the dielectric susceptibility of the crystal in reciprocal lattice vectors \mathbf{g} , and $\chi_0(\omega)$ is the average dielectric susceptibility. The permeability of the substance in the range of relatively high X-ray frequencies we are interested in is unity, and the Maxwell equations in this case have the form

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= 4\pi \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3)$$

The expansions of electric field strength \mathbf{E} and magnetic field strength \mathbf{H} , as well as on the electric induction \mathbf{D} of the field in the crystal and current density \mathbf{J} of the emitting electron into the Fourier integral in frequency have the form

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) \exp(-i\omega t) d\omega, \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{H}(\omega, \mathbf{r}) \exp(-i\omega t) d\omega, \\ \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{D}(\omega, \mathbf{r}) \exp(-i\omega t) d\omega, \end{aligned}$$



$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{J}(\omega, \mathbf{r}) \exp(-i\omega t) d\omega. \quad (4)$$

Substituting these expansions into Eqs. (3) and using the well-known relation $\mathbf{D}(\omega, \mathbf{r}) = \varepsilon(\omega, \mathbf{r})\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r})$, we obtain the following expression

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H}(\omega, \mathbf{r}) &= 4\pi \mathbf{J}(\omega, \mathbf{r}) - i\omega \alpha(\omega, \mathbf{r}) \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}), \\ \text{rot } \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) &= i\omega \mathbf{H}(\omega, \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (5)$$

Substituting into Eq. (5) the Fourier expansions of fields and electron current in wave vector \mathbf{k}

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d^3\mathbf{k}, \\ \mathbf{H}(\omega, \mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d^3\mathbf{k}, \\ \mathbf{J}(\omega, \mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d^3\mathbf{k}, \end{aligned} \quad (6)$$

and performing simple transformations, we obtain the well-known expression for Fourier transform of electric field $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ in the crystal, generated by a relativistic electron:

$$(k^2 - \omega^2(1 + \chi_0))\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)) - \omega^2 \sum_{\mathbf{g}} \chi_{-\mathbf{g}} \mathbf{E}(\mathbf{k} + \mathbf{g}, \omega) = 4\pi i \omega \mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega), \quad (7)$$

where $\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi e \mathbf{V} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{V})$ is the Fourier transform of the current density $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = e \mathbf{V} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{V}t)$ of a relativistic electron crossing the target. It should be noted that for $\chi_{-\mathbf{g}} = 0$ expression (7) describes the electric field in the amorphous medium.

In this work the two-wave approach of dynamic diffraction theory are used, in which both the incident and diffracted waves are considered as equitable in process of self repumping one into another in crystalline target.

The strengths of electromagnetic fields, excited by electron in the crystal are

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) &= E_0^{(1)}(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{e}_0^{(1)} + E_0^{(2)}(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{e}_0^{(2)}, \\ \mathbf{E}(\mathbf{k} + \mathbf{g}, \omega) &= E_g^{(1)}(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{e}_1^{(1)} + E_g^{(2)}(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{e}_1^{(2)}, \end{aligned} \quad (8)$$

$\mathbf{e}_0^{(1)} \perp \mathbf{k}$, $\mathbf{e}_0^{(2)} \perp \mathbf{k}$, $\mathbf{e}_1^{(1)} \perp \mathbf{k}_g$ и $\mathbf{e}_1^{(2)} \perp \mathbf{k}_g$, $\mathbf{k}_g = \mathbf{k} + \mathbf{g}$. Vectors $\mathbf{e}_0^{(2)}$, $\mathbf{e}_1^{(2)}$ are situated on the plane of vectors \mathbf{k} и \mathbf{k}_g (π -polarization) and $\mathbf{e}_0^{(1)}$, $\mathbf{e}_1^{(1)}$ are perpendicular to this plane (σ -polarization); g is vector of the reciprocal lattice, defining a set of reflecting atomic planes.

In the two-wave approximation of the dynamic theory, Eq. (7) combined with expressions (8) can be reduced to the well-known system of equations [20]

$$\begin{cases} (\omega^2(1 + \chi_0) - k^2)E_0^{(s)} + \omega^2 \chi_{-\mathbf{g}} C^{(s,\tau)} E_g^{(s)} = 8\pi^2 i e \omega \mathbf{e}_0^{(s)} \mathbf{V} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{V}), \\ \omega^2 \chi_{\mathbf{g}} C^{(s,\tau)} E_0^{(s)} + (\omega^2(1 + \chi_0) - k_g^2)E_g^{(s)} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

$$\chi'_{\mathbf{g}} = \chi'_0 (F(g)/Z)(S(\mathbf{g})/N_0) \exp(-g^2 u_\tau^2 / 2), \quad (10a)$$

$$\chi''_{\mathbf{g}} = \chi''_0 \exp\left(-\frac{1}{2} g^2 u_\tau^2\right), \quad (10b)$$



where $\chi_0 = \chi'_0 + i\chi''_0$ – is the average dielectric susceptibility, $F(g)$ – is the form factor of atom containing Z electrons, $S(\mathbf{g})$ is the structural factor of a unit cell containing N_0 atoms, u_τ is the r.m.s. amplitude of thermal vibrations of crystal atoms. The work addresses the X-ray frequency range, where $\chi'_g < 0$, $\chi''_0 < 0$. We will consider a crystal with the following symmetry ($\chi_g = \chi_{-g}$).

The quantity $C^{(s)}$ and $P^{(s)}$ in system (9) are defined in the following way:

$$C^{(s,\tau)} = \mathbf{e}_0^{(s)} \mathbf{e}_1^{(s)} = (-1)^\tau C^{(s)}, \quad C^{(1)} = 1, \quad C^{(2)} = |\cos 2\theta_B|, \quad P^{(1)} = \sin \varphi, \quad P^{(2)} = \cos \varphi, \\ \mathbf{e}_0^{(1)} \mathbf{V} = (\theta - \psi) P^{(1)} = \theta_\perp - \psi_\perp, \quad \mathbf{e}_0^{(2)} \mathbf{V} = (\theta + \psi) P^{(2)} = \theta_{//} + \psi_{//}, \quad (11)$$

where φ is the azimuthal radiation angle measured from the plane formed by the vectors \mathbf{V} и \mathbf{g} , the value of the reciprocal lattice vector is determined by the $g = 2\omega_B \sin \theta_B / V$, where ω_B is the Bragg frequency. The system of equations (9) for $s = 1$ and $\tau = 2$ describes the σ -polarized fields. For $s = 2$, the system of equations (9) describes π -polarized fields; note that if $2\theta_B < \frac{\pi}{2}$, then $\tau = 2$, otherwise $\tau = 1$.

Let us solve the dispersion equation for x-waves in crystal following from the system (9):

$$(\omega^2(1 + \chi_0) - k^2)(\omega^2(1 + \chi_0) - k_g^2) - \omega^4 \chi_{-g} \chi_g C^{(s)^2} = 0, \quad (12)$$

using standard methods of dynamic theory [20].

Let us search for the wave vectors projection \mathbf{k} and \mathbf{k}_g to the axle X , coinciding with the vector n (see fig. 1.) as:

$$k_x = \omega \cos \psi_0 + \frac{\omega \chi_0}{2 \cos \phi_0} + \frac{\lambda_0}{\cos \phi_0}, \quad k_{gx} = \omega \cos \phi_g + \frac{\omega \chi_0}{2 \cos \phi_g} + \frac{\lambda_g}{\cos \phi_g}. \quad (13)$$

For this purpose we will use the well-known relation, connecting dynamic addition agents λ_0 and λ_g for x-waves [20].

$$\lambda_g = \frac{\omega \beta}{2} + \lambda_0 \frac{\gamma_g}{\gamma_0}, \quad (14)$$

where $\beta = \alpha - \chi_0 \left(1 - \frac{\gamma_g}{\gamma_0}\right)$, $\alpha = \frac{1}{\omega^2} (k_g^2 - k^2)$, $\gamma_0 = \cos \phi_0$, $\gamma_g = \cos \phi_g$, ϕ_0 is the angle between accident wave vector \mathbf{k} and vector normal to the plate surface \mathbf{N} , ϕ_g is the angle between wave vector \mathbf{k}_g and the vector \mathbf{N} (see fig.1). The modules of vectors \mathbf{k} and \mathbf{k}_g are:

$$k = \omega \sqrt{1 + \chi_0} + \lambda_0, \quad k_g = \omega \sqrt{1 + \chi_0} + \lambda_g. \quad (15)$$

Let us place (13) to (12), taking into account (14), $k_{//} \approx \omega \sin \phi_0$ and $k_{g//} \approx \omega \sin \phi_g$. As a result, we will obtain the expression for dynamic addition agents:

$$\lambda_g^{(1,2)} = \frac{\omega}{4} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\chi_g \chi_{-g} C^{(s)} \frac{\gamma_g}{\gamma_0}} \right), \lambda_0^{(1,2)} = \omega \frac{\gamma_0}{4\gamma_g} \left(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\chi_g \chi_{-g} C^{(s)} \frac{\gamma_g}{\gamma_0}} \right). \quad (16)$$

As $|\lambda_0| \ll \omega$, $|\lambda_g| \ll \omega$, we can show that $\theta \approx \theta'$ (see fig.1), and therefore later on θ will be used for all occasions.

The solution of the system (9) for the field located in vacuum forward of the crystal will be:

$$E_0^{(s) \text{ vac}} = \frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega} \frac{1}{-\chi_0 - \frac{2}{\omega} \lambda_0} \delta(\lambda_0^* - \lambda_0) = \frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega} \frac{1}{\frac{\gamma_0}{|\gamma_g|} \left(-\chi_0 - \frac{2}{\omega} \frac{\gamma_0}{\gamma_g} \lambda_g + \beta \frac{\gamma_0}{\gamma_g} \right)} \delta(\lambda_g^* - \lambda_g), \quad (17)$$

where $\lambda_g^* = \frac{\omega\beta}{2} + \frac{\gamma_g}{\gamma_0} \lambda_0^*$, $\lambda_0^* = \omega \left(\frac{\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2 - \chi_0}{2} \right)$, $\delta(\lambda_0^* - \lambda_0) = \frac{|\gamma_g|}{\gamma_0} \delta(\lambda_g^* - \lambda_g)$,

$\gamma = 1/\sqrt{1-V^2}$ is Lorentz factor of the particle.

It was suitable for us to express the solution of the system (9) for diffracted field in crystal as:

$$E_g^{(s) \text{ cr}} = \frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega} \frac{\omega^2 \chi_g C^{(s,\tau)}}{4 \frac{\gamma_0^2}{\gamma_g^2} (\lambda_g - \lambda_g^{(1)}) (\lambda_g - \lambda_g^{(2)})} \delta(\lambda_g^* - \lambda_g) + E^{(s)(1)} \delta(\lambda_g - \lambda_g^{(1)}) + E^{(s)(2)} \delta(\lambda_g - \lambda_g^{(2)}), \quad (18)$$

where, $E^{(s)(1)}$ and $E^{(s)(2)}$ are free fields, corresponding to two solutions (16) of dispersion equation (12).

The diffracted field in vacuum can be written in the form

$$E_g^{(s) \text{ vac}} = E_g^{(s) \text{ Rad}} \delta\left(\lambda_g + \frac{\omega\chi_0}{2}\right), \quad (19)$$

where $E_g^{(s) \text{ Rad}}$ is the required radiation field.

The expression connecting the diffracted and incident fields in the crystal follows from the second equation of system (9):

$$E_0^{(s) \text{ cr}} = \frac{2\omega\lambda_g}{\omega^2 \chi_g C^{(s,\tau)}} E_g^{(s) \text{ cr}}. \quad (20)$$

The boundary conditions on the inlet and outlet surfaces of the crystal plate in the given geometry have the form

$$\begin{aligned} \int E_0^{(s) \text{ vac}} d\lambda_g &= \int E_0^{(s) \text{ cr}} d\lambda_g, \\ \int E_g^{(s) \text{ cr}} d\lambda_g &= \int E_g^{(s) \text{ vac}} d\lambda_g, \\ \int E_g^{(s) \text{ cr}} \exp\left(i \frac{\lambda_g}{\gamma_g} L\right) d\lambda_g &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

we will obtain the following expression for radiation field:

$$E_{\text{Rad}}^{(s)} = \frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega} \frac{\omega^2 \chi_g C^{(s,\tau)}}{2\omega \left(\lambda_g^{(2)} \exp\left(i \frac{\lambda_g^* - \lambda_g^{(2)}}{\gamma_g} L\right) - \lambda_g^{(1)} \exp\left(i \frac{\lambda_g^* - \lambda_g^{(1)}}{\gamma_g} L\right) \right)} \times$$



$$\times \left[\frac{1}{\frac{\gamma_0}{|\gamma_g|} \left(-\chi_0 - \frac{2}{\omega} \frac{\gamma_0}{\gamma_g} \lambda_g^* + \beta \frac{\gamma_0}{\gamma_g} \right)} - \frac{2\omega \exp\left(i \frac{\lambda_g^* - \lambda_g^{(2)}}{\gamma_g} L\right)}{4 \frac{\gamma_0^2}{\gamma_g^2} (\lambda_g^* - \lambda_g^{(2)})} \right] \left(1 - \exp\left(i \frac{\lambda_g^* - \lambda_g^{(1)}}{\gamma_g} L\right) \right) -$$

$$\left[\frac{1}{\frac{\gamma_0}{|\gamma_g|} \left(-\chi_0 - \frac{2}{\omega} \frac{\gamma_0}{\gamma_g} \lambda_g^* + \beta \frac{\gamma_0}{\gamma_g} \right)} - \frac{2\omega \exp\left(i \frac{\lambda_g^* - \lambda_g^{(1)}}{\gamma_g} L\right)}{4 \frac{\gamma_0^2}{\gamma_g^2} (\lambda_g^* - \lambda_g^{(2)})} \right] \left(1 - \exp\left(i \frac{\lambda_g^* - \lambda_g^{(2)}}{\gamma_g} L\right) \right). \quad (22)$$

As the radiation field of relativistic electron which rectilinearly crosses a crystal contains the contributions of PXR and DTR we will represent the amplitude $E_{\text{Rad}}^{(s)}$ as a sum of PXR and DTR amplitudes:

$$E_{\text{Rad}}^{(s)} = E_{\text{PXR}}^{(s)} + E_{\text{DTR}}^{(s)}, \quad (23a)$$

$$E_{\text{PXR}}^{(s)} = \frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega} \frac{\omega^2 \chi_g C^{(s,\tau)}}{2\omega \left(\lambda_g^{(2)} \exp\left(i \frac{\lambda_g^* - \lambda_g^{(2)}}{\gamma_g} L\right) - \lambda_g^{(1)} \exp\left(i \frac{\lambda_g^* - \lambda_g^{(1)}}{\gamma_g} L\right) \right)} \times$$

$$\times \left[\frac{2\omega \exp\left(i \frac{\lambda_g^* - \lambda_g^{(1)}}{\gamma_g} L\right)}{4 \frac{\gamma_0^2}{\gamma_g^2} (\lambda_g^* - \lambda_g^{(2)})} + \frac{\omega}{2 \frac{\gamma_0}{|\gamma_g|} \lambda_0^*} \left(1 - \exp\left(i \frac{\lambda_g^* - \lambda_g^{(2)}}{\gamma_g} L\right) \right) - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{2\omega \exp\left(i \frac{\lambda_g^* - \lambda_g^{(2)}}{\gamma_g} L\right)}{4 \frac{\gamma_0^2}{\gamma_g^2} (\lambda_g^* - \lambda_g^{(1)})} + \frac{\omega}{2 \frac{\gamma_0}{|\gamma_g|} \lambda_0^*} \left(1 - \exp\left(i \frac{\lambda_g^* - \lambda_g^{(1)}}{\gamma_g} L\right) \right) \right], \quad (23b)$$

$$E_{\text{DTR}}^{(s)} = \frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega} \frac{\omega^2 \chi_g C^{(s,\tau)}}{2\omega \left(\lambda_g^{(2)} \exp\left(-i \frac{\lambda_g^{(2)}}{\gamma_g} L\right) - \lambda_g^{(1)} \exp\left(-i \frac{\lambda_g^{(1)}}{\gamma_g} L\right) \right)} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{\frac{\gamma_0}{|\gamma_g|} \left(-\chi_0 - \frac{2}{\omega} \frac{\gamma_0}{\gamma_g} \lambda_g^* + \beta \frac{\gamma_0}{\gamma_g} \right)} + \frac{\omega}{2 \frac{\gamma_0}{|\gamma_g|} \lambda_0^*} \left(\exp\left(-i \frac{\lambda_g^{(2)}}{\gamma_g} L\right) - \exp\left(-i \frac{\lambda_g^{(1)}}{\gamma_g} L\right) \right) \right]. \quad (23c)$$

In accordance with the expression (23b) there are possible two branches (16) of dispersion relation (12) which give the contributions into PXR yield. These branches correspond to two radiated X-ray waves formed together with the equilibrium electromagnetic field of the fast particle. A larger contribution to the radiation gives the branch of RXR, for which the real part of the denominator in the

formula (23b) can vanish ($\text{Re}(\lambda_g^* - \lambda_g^{(1,2)}) = 0$): For further analyses it is convenient to represent λ_g^* and $\lambda_g^{(1,2)}$ in such a form:

$$\lambda_g^{(1,2)} = \frac{\omega |\chi_g' C^{(s)}|}{2} \left(\xi^{(s)} - \frac{i\rho^{(s)}(1+\varepsilon)}{2} \pm \sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon - i\rho^{(s)}((1+\varepsilon)\xi^{(s)} - 2\kappa^{(s)}\varepsilon) - \rho^{(s)2} \left(\frac{(1+\varepsilon)^2}{4} - \kappa^{(s)2}\varepsilon \right)} \right),$$

$$\lambda_g^* = \frac{\omega |\chi_g' C^{(s)}|}{2} (2\xi^{(s)} - i\rho^{(s)} - \varepsilon\sigma^{(s)}), \tag{24}$$

where

$$\xi^{(s)} = \xi^{(s)}(\omega) = \eta^{(s)}(\omega) + \frac{(1+\varepsilon)}{2\nu^{(s)}}, \quad \nu^{(s)} = \frac{|\chi_g' C^{(s)}|}{|\chi_0'|}, \quad \rho^{(s)} = \frac{\chi_0''}{|\chi_g' C^{(s)}|}, \quad \varepsilon = \frac{|\gamma_g|}{\gamma_0}, \quad \kappa^{(s)} = \frac{\chi_g'' C^{(s)}}{\chi_0''}$$

$$\eta^{(s)}(\omega) = \frac{\alpha}{2|\chi_g' C^{(s)}|} = \frac{2\sin^2\theta_B}{V^2|\chi_g' C^{(s)}|} \left(\frac{\omega_B(1 + \theta \cos\varphi \cot\theta_B)}{\omega} - 1 \right),$$

$$\sigma^{(s)} = \frac{1}{|\chi_g' C^{(s)}|} ((\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{//} + \psi_{//})^2 + \gamma^{-2} - \chi_0'). \tag{25}$$

Since the inequality $2\sin^2\theta_B/V^2|\chi_g' C^{(s)}| \gg 1$ is fulfilled in the range of X-ray frequencies, $\eta^{(s)}(\omega)$ is a fast function of frequency ω , and it is convenient for the further analysis of the properties of the PXR and DTR spectrum to consider $\eta^{(s)}(\omega)$ as a spectral variable. Let us note that the resultant formulas contain $\xi^{(s)}(\omega)$ and not $\eta^{(s)}(\omega)$. The second term of the last equation appears due to the refraction effect.

When deducing the formula (24) we took into account that in the considered geometry of radiation the angle between the momentum of diffracted photon and normal vector to the crystal surface is blunt which means that $\gamma_g = \cos\phi_g < 0$.

The parameter ε from Eq. (25) can be presented in the form $\varepsilon = \sin(\theta_B - \delta) / \sin(\theta_B + \delta)$, where δ is the angle between the inlet surface of the target and the crystallographic plane. For a fixed value of θ_B , quantity ε defines the orientation of the inlet surface of the crystal plate relative to the system of diffracting atomic planes (Fig. 2). As the angle of incidence $(\theta_B + \delta)$ of an electron on the target decreases, parameter δ becomes negative and then increases in magnitude (in the limiting case $\delta \rightarrow -\theta_B$), which leads to an increase in ε . On the contrary, upon an increase in the angle of incidence, ε decreases (in the limiting case $\delta \rightarrow \theta_B$).

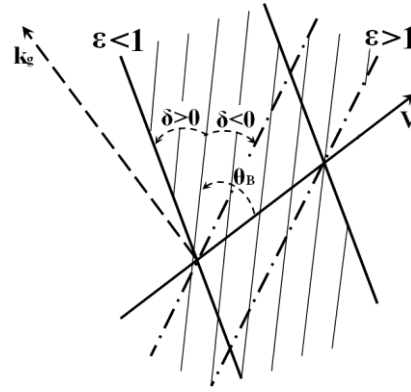


Fig. 2 Asymmetric ($\varepsilon > 1$, $\varepsilon < 1$) reflections of radiation from a crystal plate.

The case $\varepsilon = 1$ ($\delta = 0$) corresponds to symmetric reflection.

3. Spectral-angular density of PXR and DTR

By substitution of (23) to the expression for x-radiation spectra-angular density [21]:

$$\frac{d^2 W}{d\omega d\Omega} = \omega^2 (2\pi)^{-6} \sum_{s=1}^2 |E_{Rad}^{(s)}|^2, \quad (26)$$

we will obtain the formula for spectral-angular density of PXR, DTR and the item which is the result of these mechanisms interference

$$\omega \frac{d^2 N_{PXR}^{(s)}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{\pi^2} \frac{\Omega^{(s)2}}{(\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2 - \chi_0')^2} R_{PXR}^{(s)}, \quad (27a)$$

$$R_{PXR}^{(s)} = \left| \frac{\Omega_+^{(s)}}{\Delta_+^{(s)}} \frac{1 - \exp(-ib^{(s)} \Delta_+^{(s)})}{\Delta_+^{(s)}} - \frac{\Omega_-^{(s)}}{\Delta_-^{(s)}} \frac{1 - \exp(-ib^{(s)} \Delta_-^{(s)})}{\Delta_-^{(s)}} \right|^2, \quad (27b)$$

$$\omega \frac{d^2 N_{DTR}^{(s)}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{\pi^2} \Omega^{(s)2} \left(\frac{1}{\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2} - \frac{1}{\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2 - \chi_0'} \right)^2 R_{DTR}^{(s)}, \quad (28a)$$

$$R_{DTR}^{(s)} = \varepsilon^2 \left| \frac{\exp\left(-ib^{(s)} \frac{K^{(s)}}{\varepsilon}\right) - \exp\left(ib^{(s)} \frac{K^{(s)}}{\varepsilon}\right)}{\left(\xi^{(s)} - K^{(s)} - i\rho^{(s)} \frac{1+\varepsilon}{2}\right) \exp\left(-ib^{(s)} \frac{K^{(s)}}{\varepsilon}\right) - \left(\xi^{(s)} + K^{(s)} - i\rho^{(s)} \frac{1+\varepsilon}{2}\right) \exp\left(ib^{(s)} \frac{K^{(s)}}{\varepsilon}\right)} \right|^2, \quad (28b)$$

$$\omega \frac{d^2 N_{INT}^{(s)}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{\pi^2} \frac{\Omega^{(s)2}}{\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2 - \chi_0'} \times \left(\frac{1}{\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2 - \chi_0'} - \frac{1}{\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2} \right) R_{INT}^{(s)}, \quad (29a)$$

$$R_{INT}^{(s)} = 2\varepsilon \operatorname{Re} \left(\left(\frac{\Omega_+^{(s)}}{\Delta_+^{(s)}} \cdot \frac{1 - \exp(-ib^{(s)} \Delta_+^{(s)})}{\Delta_+^{(s)}} - \frac{\Omega_-^{(s)}}{\Delta_-^{(s)}} \cdot \frac{1 - \exp(-ib^{(s)} \Delta_-^{(s)})}{\Delta_-^{(s)}} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{\exp\left(-ib^{(s)} \frac{K^{(s)}}{\varepsilon}\right) - \exp\left(ib^{(s)} \frac{K^{(s)}}{\varepsilon}\right)}{\left(\xi^{(s)} - K^{(s)} - i\rho^{(s)} \frac{1+\varepsilon}{2}\right) \exp\left(-ib^{(s)} \frac{K^{(s)}}{\varepsilon}\right) - \left(\xi^{(s)} + K^{(s)} - i\rho^{(s)} \frac{1+\varepsilon}{2}\right) \exp\left(ib^{(s)} \frac{K^{(s)}}{\varepsilon}\right)} \right)^* \right), \quad (29b)$$

where the sign “*” indicates complex conjugation. The table of symbols in the formulas is:

$$\begin{aligned} \Omega^{(1)} &= \theta_{\perp} - \psi_{\perp}, \quad \Omega^{(2)} = \theta_{\parallel} + \psi_{\parallel}, \quad \sigma^{(s)} = \frac{1}{|\chi_g'|C^{(s)}} (\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2 - \chi_0'), \\ \Delta^{(s)} &= \left(\xi^{(s)} - K^{(s)} - i\rho^{(s)} \frac{1+\varepsilon}{2} \right) \exp(-ib^{(s)}\Delta_+^{(s)}) - \left(\xi^{(s)} + K^{(s)} - i\rho^{(s)} \frac{1+\varepsilon}{2} \right) \exp(-ib^{(s)}\Delta_-^{(s)}), \\ \Omega_{\pm}^{(s)} &= \varepsilon \left((\sigma^{(s)} - i\rho^{(s)}) \cdot \exp(-ib^{(s)}\Delta_{\mp}^{(s)}) + \Delta_{\pm}^{(s)} \right), \\ \Delta_{\pm}^{(s)} &= \frac{\xi^{(s)} \pm K^{(s)}}{\varepsilon} - \sigma^{(s)} + i \frac{\rho^{(s)}(\varepsilon-1)}{2\varepsilon}, \quad b^{(s)} = \frac{1}{2\sin(\theta_B + \delta)} \frac{L}{L_{ext}^{(s)}}, \\ K^{(s)} &= \sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon - i\rho^{(s)}((1+\varepsilon)\xi^{(s)} - 2\kappa^{(s)}\varepsilon) - \rho^{(s)2} \left(\frac{(1+\varepsilon)^2}{4} - \kappa^{(s)2}\varepsilon \right)}. \end{aligned} \quad (30)$$

Parameter $b^{(s)}$ characterizing the thickness of the crystal plate is the ratio of half of the path of the electron in the target $L_e = L/\sin(\theta_B + \delta)$ to the extinction length $L_{ext}^{(s)} = 1/\omega|\chi_g'|C^{(s)}$. Parameter $\rho^{(s)}$ characterizing the degree of absorption of X-waves in the crystal, is the ratio of the extinction length $L_{ext}^{(s)}$ to the length of the absorption $L_{abs} = 1/\omega\chi_0''$ of the X- rays: $\rho^{(s)} = L_{ext}^{(s)} / L_{abs}$. The functions $R_{PXR}^{(s)}$ and $R_{DTR}^{(s)}$ describe the spectra of PXR and DTR.

The expressions (27-29) describe the spectral-angular density of PXR and DTR of the relativistic electron crossing a crystal plate at an angle Ψ relative to the axis of the electron beam \mathbf{e}_1 and their interference. The expressions are obtained in the framework of the two-wave approximation of dynamical diffraction theory taking into account the angle between the reflecting system of parallel atomic planes of the crystal and the target surface (angle δ). The expressions (27-29) can be used for investigation of spectral and angular properties of PXR and DTR generated in a crystal by beams of relativistic electron. In the present time the indication of angular divergence of the super high energy electron beams, for example, at the planning international linear collider ILC is actual problem. Because of the fact that the direction of radiation can be considerable diverged from the direction of the electron beam these mechanisms of the radiation could be contenders for use in this task. The beam indication at accelerator must be carried out in real time with minimal effect on the beam characteristics. In connection with it we will consider further the spectral-angular densities of PXR and DTR for the case of a thin monocrystalline target, when the multiple scattering of the electrons on atoms can be neglected.

4. Spectral-angular density of PXR and DTR in a thin crystal

Let us take up (consider) a thin crystal. Assuming in expressions (27-28) $\rho^{(s)} = \frac{\chi_0''}{|\chi_g'|C^{(s)}} = 0$, we will obtain the following expression for spectral-angular density of PXR and DTR

$$\omega \frac{d^2 N_{PXR}^{(s)}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{\pi^2} \frac{\Omega^{(s)2}}{(\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2 - \chi_0')^2} R_{PXR}^{(s)}, \quad (31a)$$



$$R_{PXR}^{(s)} = \frac{\left(\xi^{(s)} + \sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon}\right)^2 \sin^2 \left(\frac{b^{(s)}}{2} \left(\frac{\xi^{(s)} + \sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon}}{\varepsilon} - \sigma^{(s)} \right) \right)}{\xi^{(s)2} - \varepsilon + \varepsilon \sin^2 \left(\frac{b^{(s)} \sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon}}{\varepsilon} \right) \left(\frac{\xi^{(s)} + \sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon}}{\varepsilon} - \sigma^{(s)} \right)^2}, \quad (31b)$$

$$\omega \frac{d^2 N_{DTR}^{(s)}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{\pi^2} \Omega^{(s)2} \times \left(\frac{1}{\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2} - \frac{1}{\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2 - \chi_0'} \right)^2 R_{DTR}^{(s)}, \quad (32a)$$

$$R_{DTR}^{(s)} = \frac{\varepsilon^2}{\xi^{(s)2} - (\xi^{(s)2} - \varepsilon) \coth^2 \left(\frac{b^{(s)} \sqrt{\varepsilon - \xi^{(s)2}}}{\varepsilon} \right)}. \quad (32b)$$

Let us define the angular densities of PXR and DTR by integration of expressions (31) and (32) by the frequency function $\xi^{(s)}(\omega)$ with use of the relation $\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{|\chi_g'| C^{(s)}}{2 \sin^2 \theta_B} d\xi^{(s)}$ which is followed from expression for $\xi^{(s)}(\omega)$ in (25). Then the angular density of PXR will take such a view

$$\frac{dN_{PXR}^{(s)}}{d\Omega} = \frac{e^2}{2\pi^2 \sin^2 \theta_B |\chi_g'| C^{(s)}} \frac{\Omega^{(s)2}}{\sigma^{(s)2}} \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty} R_{PXR}^{(s)} d\xi^{(s)}(\omega). \quad (33)$$

Since the spectral peak of PXR is very narrow then under condition $b^{(s)} \gg 1$ the well-known approximation $\frac{\sin^2(ax)}{x^2} \rightarrow \pi a \delta(x)$ can be used for integration. In this case the expression (33) will take a view

$$\frac{dN_{PXR}^{(s)}}{d\Omega} = \frac{e^2}{8\pi \sin^2 \theta_B |\chi_g'| C^{(s)}} \frac{\Omega^{(s)2}}{\sigma^{(s)2}} \frac{\varepsilon^2 (\sigma^{(s)2} \varepsilon - 1)}{\left(\frac{\sigma^{(s)2} \varepsilon - 1}{2\sigma^{(s)}} \right)^2 + \varepsilon \sin^2 \left(\frac{\sigma^{(s)2} \varepsilon - 1}{2\sigma^{(s)} \varepsilon} b^{(s)} \right)} b^{(s)}. \quad (34)$$

The angular density of DTR will take the view

$$\frac{dN_{DTR}^{(s)}}{d\Omega} = \frac{e^2 \chi_0'^2}{2\pi^2 \sin^2 \theta_B |\chi_g'| C^{(s)}} \frac{\Omega^{(s)2}}{\sigma^{(s)2} \left(|\chi_g'| C^{(s)} \sigma^{(s)} + \chi_0' \right)^2} \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \pi \cdot \tanh \left(\frac{b^{(s)}}{\sqrt{\varepsilon}} \right). \quad (35)$$

These expressions are derived with a glance of possibility of deviation $\Psi(\psi_{\perp}, \psi_{\parallel})$ of the direction of the electron velocity \mathbf{V} in relation to electron beam axis \mathbf{e}_1 . The obtained expressions take into account the reflection asymmetry of the electron field relative to the target surface (parameter ε) are characterized by the angle δ between target surface and a system of diffracting atomic planes in the crystal.

5. Influence of electron beam divergence on the angular densities of PXR and DTR

Let us consider the effect of the electron beam divergence on the spectral and angular characteristics of the radiation. For that, let us average radiation of an electron over all of its possible

straight trajectories in the beam. As an example, we will carry out the averaging of the spectral-angular density of PXR and DTR for the electron beam with the Gauss angular distribution:

$$f(\psi) = \frac{1}{\pi\psi_0^2} \cdot \exp\left\{-\frac{\psi^2}{\psi_0^2}\right\}, \quad (36)$$

where ψ_0 is the divergence of the beam of radiating electrons (see Figure 1). In this case the formulas for averaged angular density (11) and (12) will take the view:

$$\left\langle \frac{dN_{\text{PXR,DTR}}^{(s)}}{d\Omega} \right\rangle = \frac{1}{\pi\psi_0^2} \iint d\psi_{\perp} d\psi_{\parallel} \exp\left\{-\frac{\psi_{\perp}^2 + \psi_{\parallel}^2}{\psi_0^2}\right\} \frac{dN_{\text{PXR,DTR}}^{(s)}}{d\Omega}. \quad (37)$$

Let us carry out the numerical calculations of the angular densities of PXR and DTR using the derived expressions (34) and (35) and expression (37). For example let us consider the normalized to one electron angular density of the radiation of the beam of relativistic electron crossing a single crystal plate of tungsten $W(110)$ of thickness $L = 2\mu\text{m}$. The angle between electron beam axis \mathbf{e}_1 and the system of parallel diffracting atomic planes (110) of the crystal is chosen as $\theta_B \approx 20,5^\circ$, the Bragg frequency $\omega_B \approx 8\text{keV}$. The angle between the crystal surface and system of diffracting atomic planes $\delta \approx -10^\circ$, i.e. the case of symmetric reflection of asymmetric parameter $\varepsilon = \sin(\theta_B - \delta) / \sin(\theta_B + \delta) \approx 2,7$ is considered.

In Fig.3 the curves describing the angular density of PXR of relativistic electron under different values of initial divergence ψ_0 of electron beam are cited. The curves are built for the case when the relativistic electrons have energy of 150 GeV. Under this condition the dependence of angular density of PXR on electron energy is saturated and angular density do not change with increase of electron energy.

The curves demonstrate a weak dependence of PXR angular density on initial divergence, that is connected with the broad angular distribution of PXR. That is why the use of PXR for the estimation of divergence of the electron beams of high energy will not be possible.

One can see, that angular density of PXR weakly depends on divergence of the beam at such value of energy of relativistic electrons. It is connected with the fact that the angular distribution of PXR in this case is broader than that of electron beam.

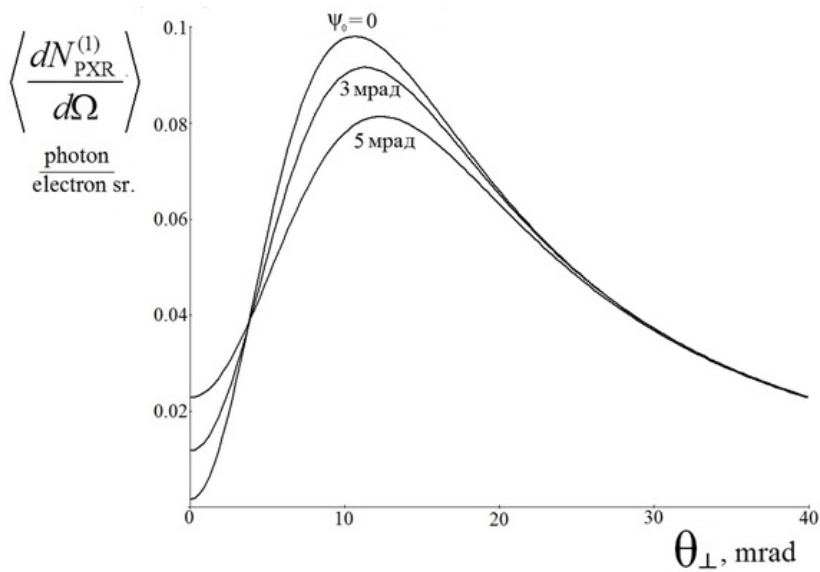


Fig. 3 The influence of electron beam divergence on the angular density of PXR.

Energy of electron is $E > 150 \text{ MeV}$, ψ_0 is electron beam.

In Fig.4 the curves describing the angular density of DTR of relativistic electron with energy of $E = 500 \text{ MeV}$ are presented for different values of divergence ψ_0 . One can see that the angular density of DTR strongly depends on initial divergence of the electron beam. This fact can be explained by narrow angular distribution of DTR, which leads to considerable dependence on the divergence of the electron beam.

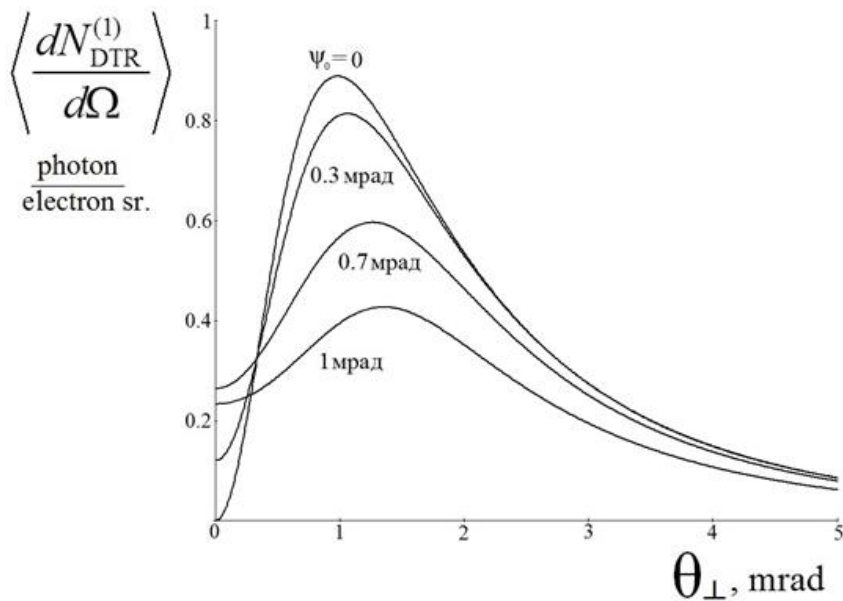


Fig. 4 The influence of electron beam divergence on angular density of DTR.

Energy of electron beam is $E = 500 \text{ MeV}$.

One can see that electron beam divergence more appreciably influence on angular density of DTR. It can be explained by the fact that DTR is narrower than PXR under high energy of radiating electron and becomes even narrower when energy of the electron increases. That is why DTR is more sensitive to a change of divergence of electron beam than PXR, which angular distribution almost do not depend on the electron energy. One can see in the fig. 4 that the angular distribution of DTR becomes narrower and the dependence of DTR characteristics on electron beam divergence becomes stronger when the energy of radiating electron increases. It are demonstrated also in Fig. 5 and Fig.6 for energy of electrons $E = 10\Gamma\varepsilon B$ and $E = 200\Gamma\varepsilon B$ correspondingly.

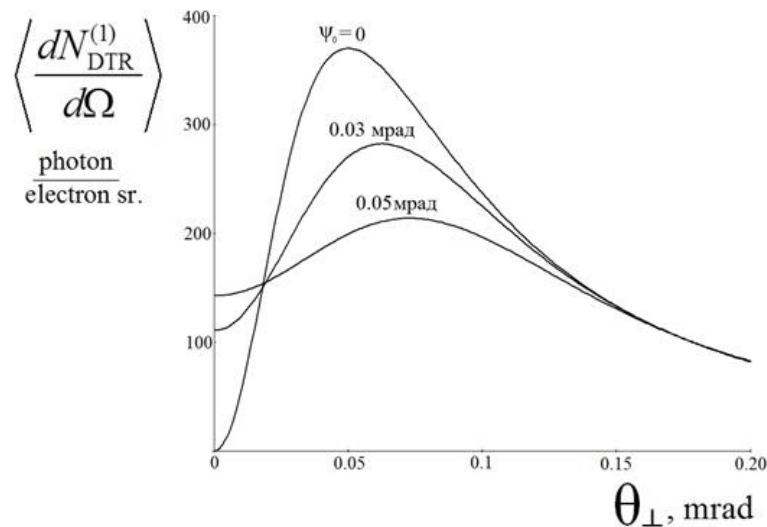


Fig. 5 The same, that in Fig. 4 under value of relativistic electron energy $E = 10\Gamma\varepsilon B$.

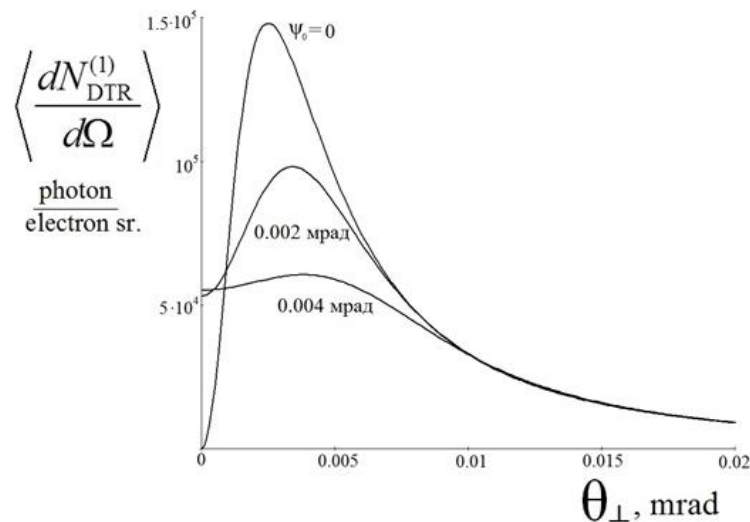


Fig. 6 The same, that in Fig. 4 under value of relativistic electron energy $E = 200\Gamma\varepsilon B$.

For electrons of super high energies the angular density of DTR becomes very sensitive to angular divergence of electron beam. That can be used for analyze of the electron beams of super high energies.

It need be noted that under super high energies of radiating electrons the measurement of DTR characteristics is difficult task because of its sharp directionality. But in this case one can enough easy calculate the dependence on divergence of electron beam of number of the photons radiated in collimator



of large lateral dimensions. So, the angular density or intensity of DTR can be effectively used for estimation of divergence of high energy electron beam, for example on the international linear electron collider ILC being under construction now.

As appropriate, the obtained expressions (31) and (32) for spectral-angular densities of PXR and DTR can be averaged by analogy to averaging of the angular densities (34) and (35).

In the present work the averaging of the radiation from electrons in the beam was carried out, as an example, with the assumption of Gauss angular distribution of electrons in the beam. But the methodology proposed in the present work allows the use for calculation of spectral-angular characteristics of radiations by the beams with arbitrary distribution of electrons. So, the expressions (31), (32), (34) and (35) allow calculate for each electron in the beam the spectral-angular characteristics of PXR and DTR with taking into account the angle between its trajectory and axis of the electron beam, with the assumption that electron rectilinearly crosses the monocrystalline plate and then find the integral spectral-angular characteristics of radiation by the beam as a whole

Conclusion

The dynamic theory of coherent X-Ray radiation produced by divergent relativistic electron beam crossing a monocrystalline plate in Bragg scattering geometry has been developed. The expressions describing spectral-angular characteristic of PXR and DTR have been derived based on the two-wave approximation of diffraction theory taking into account the deviation of electron velocity vector from the electron beam axis direction. The expressions for the general case of asymmetric reflection of the electron coulomb field relative to target surface have been obtained. The DTR and PXR are considered in the case of a thin target when the multiple scattering of the electrons on the target atoms is negligible which is important for measuring electron beam divergence in a real time regime without change under influence of measurement process. The calculations of the radiation spectral-angular distribution have been made using the averaging by the Gauss two-dimensional angular distribution of the electrons in the beam. It was shown that the angular density of DTR depends on electron beam divergence more strongly than the angular density of PXR. The amplification of DTR angular density dependence on electron beam divergence with increase of the radiating electron energy has been identified. It is shown that under ultrahigh energies the DTR angular density becomes sensitive to very small angular divergence of the electron beam, which can be used for analysis of the dimension and divergence of such an electron beam as in the planning international linear electron collider ILC.

Acknowledgements

The Russian Science Foundation (project N 15-12-10019) supported this work.

References

1. Takabayashi Y.// Phys. Lett. A, 2012. V. 376. P. 2408.
2. Takabayashi Y., Sumitani K. // Phys. Lett. A, 2013, V. 377. P. 2577.
3. Gogolev A., Potylitsyn A., Kube G.// J. Phys. Conference Series, 2011. V. 357. P. 012018.
4. Sukhikh L.G., Gogolev S.Yu., and Potylitsyn A.P.// J. Phys. Conference Series, 2010. V. 236. P. 012011.
5. Konkov A.S., Karataev P.V., Potylitsyn A.P. and Gogolev A.S.// J. Phys. Conference Series, 2014. V. 517. P. 012003.

6. Ter-Mikaelian M.L. High-Energy Electromagnetic Processes in Condensed Media. Wiley, New York, 1972.
7. Garibian G.M., Yang C.// J. Exp. Theor. Phys., 1971. V. 61. P.930.
8. Baryshevsky V.G., Feranchuk I.D.// J. Exp. Theor. Phys., 1971. V.61. P. 944.
9. Ginzburg V.L. and Frank I.M.// J. Exp. Theor. Phys., 1946. V. 15. P.15.
10. Ginzburg V. L. and Tsytovich V. N., Transition Radiation and Transition Scattering (Nauka, Moscow, 1984; Adam Hilger, Bristol, United Kingdom, 1990).
11. Caticha A.// Phys. Rev. A, 1989. V. 40. P.4322.
12. Baryshevsky V.// Nucl. Instr. and Meth. A , 1997. V. 122. P. 13.
13. Artru X, Rullhusen P.//Nucl. Instr. and Meth. B, 1998. V. 145. P. 1.
14. Nasonov N.// Phys. Lett. A, 1998. V. 246. P. 148.
15. Blazhevich S.V., Noskov A.V.//Nucl. Instr. and Meth. B, 2006. V. 252. P.69.
16. Blazhevich S.V., Noskov A.V.// Nucl. Instr. and Meth. B, 2008. V. 266. P.3770.
17. Blazhevich S., Noskov A.// J. Exp. Theor. Phys., 2009. V. P. 901.
18. Blazhevich S.V., Noskov A.V.// Nucl. Instr. and Meth. B, 2013. V. 309. P. 70.
19. Blazhevich S. V., Noskov A.V.// J. Exp. Theor. Phys., 2015. V. 120. P. 753.
20. Pinsker Z. G., Dynamic Scattering of X-Rays in Perfect Crystals (Springer, Berlin, 1984).
21. Bazylev V., Zhevago, Emission From Fast Particles Moving in a Medium and External Fields, Nauka, USSR N., Moscow, 1987 (in Russian).



УДК 537.8

**DYNAMIC THEORY X-RAY RADIATION BY RELATIVISTIC ELECTRON
IN COMPOSITE TARGET****S.V. Blazhevich, S.N. Nemtsev, A.V. Noskov, R.A. Zagorodnyuk***Belgorod State University, Belgorod, Russia.
E-mail: noskovbupk@mail.ru**Key words: Relativistic electron; Parametric X-radiation; Diffracted transition radiation; periodic layered medium*

Resume. The dynamic theory of coherent X-ray radiation by relativistic electron crossing a three-layer structure consisting of an amorphous substance layer, a layer of vacuum and a layer with artificial periodic structure has been developed. The process of radiation and propagation of X-ray waves in an artificial periodic structure have been considered based on two-wave approximation of dynamic diffraction theory in Laue scattering geometry.

1. Introduction

When a relativistic electron crosses an amorphous plate, the transition radiation (TR) arises near the boundaries of the plate and then the TR photons propagate at a small angle to direction of electron velocity vector [1]. In the case of a monocrystalline plate, the TR will undergo the dynamical diffraction on a system of atomic planes in the crystal and will be reflected in the Bragg direction, forming the diffracted transition radiation (DTR) [2-5]. By analogy with DTR in the crystal, an electron crossing periodic layered medium generates TR whose photons diffract on system of layers of periodical layered medium in the plate forming the DTR in the direction near Bragg direction [6]. Together with DTR in layered media the parametric X-Ray radiation (PXR) [7-9] occurs as a result of diffraction of pseudo-photons of coulomb field of relativistic electron on the system of parallel atomic plane in the crystal or on the system of layers in the multilayered target.

A theory of coherent X-ray radiation of relativistic in the crystal were developed in the network of two wave approximation of dynamical theory of X-ray waves diffraction in the works [10-14]. In the works [10-11] the coherent X-ray radiation was treated in special case of symmetric reflection, when the reflecting system of atomic planes of the crystal is situated parallel to the target surface (in the case of Bragg scattering geometry) or perpendicular (in the case of Laue scattering geometry). In the works [12-14] the dynamic theory of coherent X-ray radiation of relativistic electron in crystal was developed for the general case of asymmetric to relate of the crystal surface reflection of the electron coulomb field, when a system of parallel reflecting atomic planes in the target can be situated at arbitrary angle to the target surface.

Traditionally the radiation of relativistic electron was considered in a separated amorphous, crystalline or multilayer target. A theoretical description of coherent radiation of relativistic electron in composite targets was not consider previously. The experimental research of generation of coherent X-ray radiation [15-19] in composite structures had shown the possibilities of considerable increase of intensity of DTR yield because of increase of target boundaries number.

Recently in [20-22] the theory of coherent X-ray radiation of relativistic electron crossing composite structure “amorphous layer – crystalline layer” and “amorphous layer-vacuum-crystalline layer” was developed in framework of dynamic theory of diffraction. The expressions describing DTR and PXR of relativistic electron in such structures were derived and investigated. The possibility of considerable increase of spectral-angular density of DTR because of constructive interference of TR on the target boundaries.

The present work is devoted to investigation of coherent X-ray radiation of relativistic electron crossing the two-layers structure “amorphous – vacuum – single crystal”. In the framework of two-wave approximation of dynamic diffraction theory of X-ray waves in the single crystal the expressions describing the spectral-angular characteristics of the radiation in such structures are derived. The expressions describing the DTR and PXR spectral-angular densities and their interference in the considered structure have been obtained for general case of asymmetric reflection of the electron coulomb field from the layer with artificial periodic structure. At that, under constructive interference of TR waves from different boundaries of amorphous layer and constructive interference of TR waves from amorphous layer and entrance boundary of artificial periodic structure the spectral-angular density of DTR can be increased by orders of magnitude greater than the value of the spectral-angular density from artificial structure only. The possibility to increase the angular DTR density with increasing the substance density of amorphous layer has been shown.

2. Radiation amplitude

Let us consider the radiation of relativistic electron rectilinearly with a velocity \mathbf{V} crosses a three-layers structure consisted of two amorphous layers and one a layer with artificial periodic structure (see fig. 1.) with thicknesses of c , a and b , respectively. The dielectric susceptibility of the amorphous layers we will designate as χ_c and χ_a respectively, their thicknesses are l_1 and l_2 , the period is $T = l_1 + l_2$.

While solving the problem, let us consider an equation for a Fourier image of an electromagnetic field

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \int dt d^3 \mathbf{r} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}) . \tag{1}$$

Since the field of a relativistic particle could, to a good accuracy, be taken as being transverse, the incident $\mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega)$ and diffracted $\mathbf{E}_g(\mathbf{k}, \omega)$ electromagnetic waves are determined by two amplitudes with different values of transverse polarization:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) &= E_0^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)\mathbf{e}_0^{(1)} + E_0^{(2)}(\mathbf{k}, \omega)\mathbf{e}_0^{(2)} , \\ \mathbf{E}_g(\mathbf{k}, \omega) &= E_g^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)\mathbf{e}_1^{(1)} + E_g^{(2)}(\mathbf{k}, \omega)\mathbf{e}_1^{(2)} , \end{aligned} \tag{2}$$

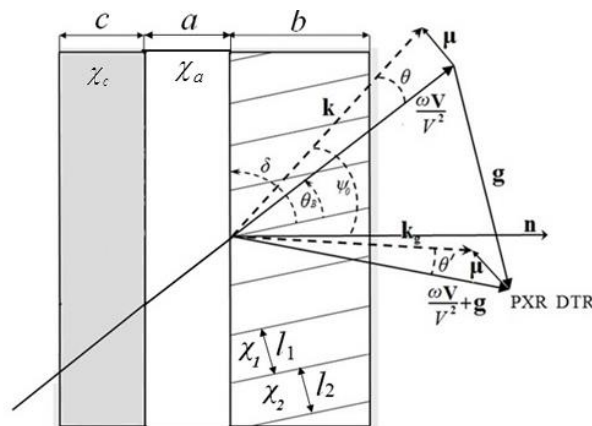


Fig.1. Geometry of the radiation process and the system of the using parameters notations, θ and θ' are the radiation angles, θ_B is Bragg angle, \mathbf{k} and \mathbf{k}_g are wave vectors of incident and diffracted photons.



where the unit vectors of polarization $\mathbf{e}_0^{(1)}$ and $\mathbf{e}_0^{(2)}$ are perpendicular to vector \mathbf{k} , and vectors $\mathbf{e}_1^{(1)}$ and $\mathbf{e}_1^{(2)}$ are perpendicular to vector $\mathbf{k}_g = \mathbf{k} + \mathbf{g}$. Vectors $\mathbf{e}_0^{(2)}$, $\mathbf{e}_1^{(2)}$ are situated on the plane of vectors \mathbf{k} and \mathbf{k}_g (π -polarization) and $\mathbf{e}_0^{(1)}$, $\mathbf{e}_1^{(1)}$ are perpendicular to this plane (σ -polarization); \mathbf{g} is similar to the reciprocal lattice vector in a single crystal medium – it is perpendicular to the layers of the structure and its magnitude is $g = \frac{2\pi}{T}n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

The system of equation for the Fourier transform images of electromagnetic field in two-wave approximation of dynamic theory of diffraction has the following view [23]:

$$\begin{cases} (\omega^2(1 + \chi_0) - k^2)E_0^{(s)} + \omega^2\chi_{-g}C^{(s)}E_g^{(s)} = 8\pi^2 i e \omega \theta V P^{(s)} \delta(\omega - \mathbf{kV}), \\ \omega^2\chi_g C^{(s)}E_0^{(s)} + (\omega^2(1 + \chi_0) - k_g^2)E_g^{(s)} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

where $\chi_0 = \chi_0' + i\chi_0''$ is the average dielectric susceptibility, χ_g and χ_{-g} are the coefficients of the Fourier expansion of the dielectric susceptibility of the artificial periodic structure over the vectors \mathbf{g} :

$$\chi(\omega, \mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}} \chi_{\mathbf{g}}(\omega) \exp(i\mathbf{g}\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}} (\chi_{\mathbf{g}}'(\omega) + i\chi_{\mathbf{g}}''(\omega)) \exp(i\mathbf{g}\mathbf{r}). \quad (4)$$

The values $C^{(s)}$ and $P^{(s)}$ are defined in the system (3) as

$$\begin{aligned} C^{(s)} &= \mathbf{e}_0^{(s)} \mathbf{e}_1^{(s)}, \quad C^{(1)} = 1, \quad C^{(2)} = \cos 2\theta_B, \\ P^{(s)} &= \mathbf{e}_0^{(s)} (\boldsymbol{\mu} / \mu), \quad P^{(1)} = \sin \varphi, \quad P^{(2)} = \cos \varphi, \end{aligned} \quad (5)$$

where $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{k} - \omega \mathbf{V} / V^2$ is the virtual photon momentum vector component perpendicular to the particle velocity vector \mathbf{V} ($\mu = \omega \theta / V$, where $\theta \ll 1$ is the angle between \mathbf{k} and \mathbf{V}), θ_B is the Bragg angle, φ is the azimuthal angle of incidence of radiation measured from the plane formed by electron velocity vector \mathbf{V} and vector \mathbf{g} , the value of the vector \mathbf{g} is shown by expression $g = 2\omega_B \sin \theta_B / V$, ω_B is Bragg's frequency. The angle between vector $\frac{\omega \mathbf{V}}{V^2} + \mathbf{g}$ and diffracted wave vector \mathbf{k}_g is defined as θ' . The equation system (3) under $s = 1$, describes the fields of σ -polarization, and under $s = 2$ the fields of π -polarization

The values χ_0 and χ_g for considered periodic structure have the following view:

$$\chi_0(\omega) = \frac{l_1 \chi_1 + l_2 \chi_2}{T}, \quad \chi_g(\omega) = \frac{\exp(-ig l_1) - 1}{igT} (\chi_2 - \chi_1). \quad (6)$$

Further we will use the relations resulted from (6):

$$\chi_0' = \frac{l_1 \chi_1' + l_2 \chi_2'}{T}, \quad \chi_0'' = \frac{l_1 \chi_1'' + l_2 \chi_2''}{T}, \quad (7a)$$

$$\operatorname{Re} \sqrt{\chi_g \chi_{-g}} = \frac{2 \sin\left(\frac{gl_1}{2}\right)}{gT} (\chi_2' - \chi_1'), \quad \operatorname{Im} \sqrt{\chi_g \chi_{-g}} = \frac{2 \sin\left(\frac{gl_1}{2}\right)}{gT} (\chi_2'' - \chi_1'') \quad (7b)$$

To find the expressions for the wave vector magnitudes k and k_g we solve the dispersion equation for X-waves in periodic structure following from the system (3)

$$(\omega^2(1 + \chi_0) - k^2)(\omega^2(1 + \chi_0) - k_g^2) - \omega^4 \chi_{-g} \chi_g C^{(s)^2} = 0, \quad (8)$$

using standard methods of dynamic theory [24]:

$$k = \omega \sqrt{1 + \chi_0} + \lambda_0, \quad k_g = \omega \sqrt{1 + \chi_0} + \lambda_g. \quad (9)$$

$$\lambda_g^{(1,2)} = \frac{\omega}{4} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4 \chi_g \chi_{-g} C^{(s)^2} \frac{\gamma_g}{\gamma_0}} \right), \quad (10)$$

$$\lambda_0^{(1,2)} = \omega \frac{\gamma_0}{4 \gamma_g} \left(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4 \chi_g \chi_{-g} C^{(s)^2} \frac{\gamma_g}{\gamma_0}} \right), \quad (11)$$

where $\beta = \alpha - \chi_0 \left(1 - \frac{\gamma_g}{\gamma_0}\right)$, $\alpha = \frac{1}{\omega^2} (k_g^2 - k^2)$, $\gamma_0 = \cos \Psi_0$, $\gamma_g = \cos \Psi_g$, Ψ_0 - is the angle between incident wave vector \mathbf{k} and vector normal to the plate surface \mathbf{n} , Ψ_g is the angle between wave vector \mathbf{k}_g and the vector \mathbf{n} (see figure 1). As the dynamical corrections $|\lambda_0| \ll \omega$ and $|\lambda_g| \ll \omega$, we can show that $\theta \approx \theta'$ (see in figure 1), and hereinafter will use θ in all the occasions.

The lengths $k_a = \omega \sqrt{1 + \chi_a}$ and $k_c = \omega \sqrt{1 + \chi_c}$ of the wavevector of free photons in amorphous media

can be conveniently written in the form

$$k_a = \omega \left(1 + \frac{\chi_0}{2}\right) + \frac{\gamma_0}{\gamma_g} \left(\lambda'_{ga} - \frac{\omega \beta}{2}\right), \quad k_c = \omega \left(1 + \frac{\chi_0}{2}\right) + \frac{\gamma_0}{\gamma_g} \left(\lambda'_{gc} - \frac{\omega \beta}{2}\right), \quad (12)$$

where

$$\lambda'_{ga} = \lambda_g^* - \frac{\gamma_g}{\gamma_0} \omega \left(\frac{\gamma^{-2} + \theta^2 - \chi_a}{2}\right), \quad \lambda'_{gc} = \lambda_g^* - \frac{\gamma_g}{\gamma_0} \omega \left(\frac{\gamma^{-2} + \theta^2 - \chi_c}{2}\right), \quad \lambda_g^* = \frac{\omega \beta}{2} + \frac{\gamma_g}{\gamma_0} \lambda_0^*,$$

$$\lambda_0^* = \omega \left(\frac{\gamma^{-2} + \theta^2 - \chi_0}{2}\right), \quad (13)$$

and the length of the wave vector of a freely emitted photon in the Bragg scattering direction can be as

$$k_0 = \omega \left(1 + \frac{\chi_0}{2}\right) + \lambda_g'', \quad \text{written } \lambda_g'' = -\omega \frac{\chi_0}{2}. \quad \gamma = 1/\sqrt{1-V^2} - \text{Лоренц-фактор частицы.}$$

Using the notation introduced above and system of equations (3), we can write the expressions for the fields. The field in vacuum in front of the target is represented by pseudophotons of the Coulomb field of a relativistic electron incident on the target:

$$E_0^{(s)vac I} = \frac{8\pi^2 i e V \theta P^{(s)}}{\omega} \frac{1}{\gamma_0 \left(-\chi_0 - \frac{2 \gamma_0}{\omega \gamma_g} \lambda_g + \beta \frac{\gamma_0}{\gamma_g}\right)} \delta(\lambda_g - \lambda_g^*) \quad (14)$$

In amorphous media the field consists of coulomb field of the electron and field of radiated free phonons $E_c^{(s)}$ and $E_a^{(s)}$ of transition radiation



$$E_{c0}^{(s)} = \frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega} \frac{1}{\frac{\gamma_0}{\gamma_g} \left(-\chi_0 + \chi_a - \frac{2}{\omega} \frac{\gamma_0}{\gamma_g} \lambda_g + \beta \frac{\gamma_0}{\gamma_g} \right)} \delta(\lambda_g - \lambda_g^*) + E_c^{(s)} \delta(\lambda_g - \lambda_{gc}'), \quad (15)$$

$$E_{a0}^{(s)} = \frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega} \frac{1}{\frac{\gamma_0}{\gamma_g} \left(-\chi_0 + \chi_a - \frac{2}{\omega} \frac{\gamma_0}{\gamma_g} \lambda_g + \beta \frac{\gamma_0}{\gamma_g} \right)} \delta(\lambda_g - \lambda_g^*) + E_a^{(s)} \delta(\lambda_g - \lambda_{ga}'), \quad (16)$$

The solution of system of equations (3) for diffracted field in periodic layered medium we represent in following form:

$$E_g^{(s)\text{medium}} = -\frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega} \frac{\omega^2 \chi_g C^{(s)}}{4 \frac{\gamma_0^2}{\gamma_g^2} (\lambda_g - \lambda_g^{(1)}) (\lambda_g - \lambda_g^{(2)})} \delta(\lambda_g - \lambda_g^*) + E_g^{(s)(1)} \delta(\lambda_g - \lambda_g^{(1)}) + E_g^{(s)(2)} \delta(\lambda_g - \lambda_g^{(2)}), \quad (17)$$

where $E_g^{(s)(1)}$ и $E_g^{(s)(2)}$ – the diffracted free fields in periodical layered medium.

In vacuum behind periodical structure the diffracted field has the view:

$$E_g^{(s)\text{vacII}} = E_g^{(s)\text{Rad}} \delta\left(\lambda_g + \frac{\omega \chi_0}{2}\right), \quad (18)$$

where $E_g^{(s)\text{Rad}}$ - is the field of coherent radiation near of the Bragg direction.

From the second equation of system (3) the expression binding the diffracted and incident fields in periodic layered structure:

$$E_0^{(s)\text{medium}} = \frac{2\omega \lambda_g}{\omega^2 \chi_g C^{(s)}} E_g^{(s)\text{medium}}. \quad (19)$$

For definition of the amplitude of radiation field $E_g^{(s)\text{Rad}}$ we will use the general conditions on four boundaries of considering three-layer target.

$$\begin{aligned} \int E_0^{(s)\text{vacI}} d\lambda_g &= \int E_{c0}^{(s)} d\lambda_g, \quad \int E_{c0}^{(s)} e^{i\frac{\lambda_g}{\gamma_g} c} d\lambda_g = \int E_{a0}^{(s)} e^{i\frac{\lambda_g}{\gamma_g} c} d\lambda_g, \\ \int E_{a0}^{(s)} e^{i\frac{\lambda_g}{\gamma_g} (c+a)} d\lambda_g &= \int E_0^{(s)\text{medium}} e^{i\frac{\lambda_g}{\gamma_g} (c+a)} d\lambda_g, \\ \int E_g^{(s)\text{medium}} e^{i\frac{\lambda_g}{\gamma_g} (a+c)} d\lambda_g &= 0, \\ \int E_g^{(s)\text{medium}} e^{i\frac{\lambda_g}{\gamma_g} (c+a+b)} d\lambda_g &= \int E_g^{(s)\text{vacII}} e^{i\frac{\lambda_g}{\gamma_g} (c+a+b)} d\lambda_g. \end{aligned} \quad (20)$$

As the result the expression for the radiation amplitude $E_g^{(s)\text{Rad}} = E_{PXR}^{(s)} + E_{DTR}^{(s)}$ contained the contributions of PXR and DTR radiation mechanisms was derived:

$$E_g^{(s)\text{Rad}} = E_{DTR}^{(s)} + E_{PXR}^{(s)}, \quad (21a)$$

$$E_{DTR}^{(s)} = \frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega} e^{i\left(\frac{\omega\chi_0 + \lambda_g^*}{2}\right)\frac{(c+a+b)}{\gamma_g}} \frac{\omega^2 \chi_g C^{(s)}}{2\omega \frac{\gamma_0}{\gamma_g} (\lambda_g^{(1)} - \lambda_g^{(2)})} \left(e^{i\frac{\lambda_g^{(1)} - \lambda_g^*}{\gamma_g} b} - e^{i\frac{\lambda_g^{(2)} - \lambda_g^*}{\gamma_g} b} \right) \times$$

$$\times \left[\left(\frac{1}{\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi_c} - \frac{1}{\theta^2 + \gamma^{-2}} \right) e^{-i\frac{\omega c}{2\gamma_0}(\gamma^{-2} + \theta^2 - \chi_c) - i\frac{\omega a}{2\gamma_0}(\gamma^{-2} + \theta^2 - \chi_a)} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi_a} - \frac{1}{\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi_c} \right) e^{-i\frac{\omega a}{2\gamma_0}(\gamma^{-2} + \theta^2 - \chi_a)} + \frac{1}{\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi_0} - \frac{1}{\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi_a} \right], \quad (21b)$$

$$E_{PXR}^{(s)} = \frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega} e^{i\left(\frac{\omega\chi_0 + \lambda_g^*}{2}\right)\frac{(c+a+b)}{\gamma_g}} \frac{\omega^2 \chi_g C^{(s)}}{2\omega \frac{\gamma_0}{\gamma_g} (\lambda_g^{(1)} - \lambda_g^{(2)})} \left[\left(\frac{1}{\chi_0 - \theta^2 - \gamma^{-2}} + \frac{\omega}{2\frac{\gamma_0}{\gamma_g} (\lambda_g^* - \lambda_g^{(1)})} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(e^{i\frac{\lambda_g^{(1)} - \lambda_g^*}{\gamma_g} b} - 1 \right) - \left(\frac{1}{\chi_0 - \theta^2 - \gamma^{-2}} + \frac{\omega}{2\frac{\gamma_0}{\gamma_g} (\lambda_g^* - \lambda_g^{(2)})} \right) \left(e^{i\frac{\lambda_g^{(2)} - \lambda_g^*}{\gamma_g} b} - 1 \right) \right], \quad (21c)$$

3. Radiation amplitude Spectral-angular density of radiation

Let us consider the radiation of a relativistic electron in the case when the second layer is a vacuum ($\chi_a = 0$). To clarify and analyze the effects that are not associated with absorption, we consider a simple case of a thin nonabsorbing target ($\chi_0'' = \chi_c'' = 0$). Substituting relations (21b) and (21c) into the well known expression [23] for the spectral–angular density of X-rays

$$\omega \frac{d^2 N}{d\omega d\Omega} = \omega^2 (2\pi)^{-6} \sum_{s=1}^2 |E^{(s)Rad}|^2, \quad (22)$$

we obtain the expressions describing the spectral–angular densities of PXR and DTR from a relativistic electron in the target, which can be written in the form convenient for analysis:

$$\omega \frac{d^2 N_{PXR}^{(s)}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{P^{(s)^2}}{|\chi_0'|} \cdot \frac{\Omega^2}{(\Omega_0^2 + 1)^2} R_{PXR}^{(s)}, \quad (23a)$$

where the expression $R_{PXR}^{(s)}$ describing PXR spectrum has a view

$$R_{PXR}^{(s)} = 4 \left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \varepsilon}} \right)^2 \frac{\sin^2 \left(\frac{B^{(s)}}{2} \left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 + \varepsilon}}{\varepsilon} \right) \right)}{\left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 + \varepsilon}}{\varepsilon} \right)^2}, \quad (23b)$$

$$\omega \frac{d^2 N_{DTR}^{(s)}}{d\omega d\Omega} = T_{DTR}^{(s)} = T_1^{(s)} + T_2^{(s)} + T_{int}^{(s)}, \quad (24a)$$



where

$$T_1^{(s)} = \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{P^{(s)^2}}{|\chi'_0|} \cdot 4\Omega^2 \left(\frac{1}{\Omega_0^2 + \frac{\chi'_c}{\chi'_0}} - \frac{1}{\Omega_0^2} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{B^{(s)}}{2} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{1}{v^{(s)}} \left(\Omega_0^2 + \frac{\chi'_c}{\chi'_0} \right) \right) R_{DTR}^{(s)}, \quad (24b)$$

$$T_2^{(s)} = \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{P^{(s)^2}}{|\chi'_0|} \cdot \Omega^2 \left(\frac{1}{\Omega_0^2 + 1} - \frac{1}{\Omega_0^2} \right)^2 R_{DTR}^{(s)}, \quad (24c)$$

$$T_{int}^{(s)} = \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{P^{(s)^2}}{|\chi'_0|} \cdot 2\Omega^2 \left(\frac{1}{\Omega_0^2 + 1} - \frac{1}{\Omega_0^2} \right) \left(\frac{1}{\Omega_0^2} - \frac{1}{\Omega_0^2 + \frac{\chi'_c}{\chi'_0}} \right) \times \\ \times \left[\cos \left(B^{(s)} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{v^{(s)}} \Omega_0^2 \right) - \cos \left(B^{(s)} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{v^{(s)}} \Omega_0^2 + B^{(s)} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{1}{v^{(s)}} \left(\Omega_0^2 + \frac{\chi'_c}{\chi'_0} \right) \right) \right] R_{DTR}^{(s)}, \quad (24d)$$

where the expression describing DTR spectrum has a following view

$$R_{DTR}^{(s)} = \frac{4\varepsilon^2}{\xi^{(s)}(\omega)^2 + \varepsilon} \sin^2 \left(\frac{B^{(s)} \sqrt{\xi^{(s)}(\omega)^2 + \varepsilon}}{\varepsilon} \right). \quad (24e)$$

The functions $T_1^{(s)}$ and $T_2^{(s)}$ have describing spectral-angular densities of DTR corresponding to waves of the radiation generated in amorphous layer and on the entrance boundary of periodical layered medium and the function $T_{int}^{(s)}$ describes the interference of these waves.

In expressions (23) – (24) following notations are accepted.

$$\Omega_0^2 = \Omega^2 + \Gamma^2, \quad \Omega = \frac{\theta}{\sqrt{|\chi'_0|}}, \quad \Gamma = \frac{1}{\gamma \sqrt{|\chi'_0|}}, \quad \chi'_0 = \frac{\chi'_1 + r\chi'_2}{1+r}, \quad v^{(s)} = \frac{C^{(s)} \left| \sin \left(\frac{\pi n}{1+r} \right) \right|}{\frac{\pi n}{1+r}} \left| \frac{\chi'_2 - \chi'_1}{\chi'_1 + r\chi'_2} \right|, \\ \varepsilon = \frac{\sin(\delta + \theta_B)}{\sin(\delta - \theta_B)}, \quad B^{(s)} = \frac{1}{2 \sin(\delta - \theta_B)} \frac{b}{L_{ext}^{(s)}}, \quad L_{ext}^{(s)} = \frac{1}{C^{(s)} \omega} \frac{\pi n}{\left| \sin \left(\frac{\pi n}{1+r} \right) \right| |\chi'_2 - \chi'_1|}, \quad \varepsilon = \frac{\sin(\delta + \theta_B)}{\sin(\delta - \theta_B)}, \\ \sigma^{(s)} = \frac{\pi n}{C^{(s)} |\chi'_2 - \chi'_1| \left| \sin \left(\frac{\pi n}{1+r} \right) \right|} (\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi'_0), \quad \xi^{(s)}(\omega) = \frac{2\pi^2 n^2}{T^2 \omega_B} L_{ext}^{(s)} \left(1 - \frac{\omega \left(1 - \theta_{//} \sqrt{\frac{T^2 \omega_B^2}{\pi^2 n^2} - 1} \right)}{\omega_B} \right) + \frac{1 - \varepsilon}{2v^{(s)}}, \quad r = \frac{l_2}{l_1}. \quad (25)$$

The constructive interference of the waves from different boundaries leads to a considerable increase in the spectral-angular density of DTR under the condition derived from (24b):

$$\frac{B^{(s)}}{2} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{1}{v^{(s)}} \left(\Omega_0^2 + \frac{\chi'_c}{\chi'_0} \right) = \frac{\omega c}{4 \sin(\delta - \theta_B)} (\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi'_c) = (2n+1) \frac{\pi}{2}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (26)$$



Additionally, DTR spectral-angular density can be increased due to the constructive interference of the waves of TR from the amorphous layer and the entrance boundary of periodical layered target under the condition following from (24d):

$$B^{(s)} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{v^{(s)}} \Omega_0^2 = \frac{\omega a}{2 \sin(\delta - \theta_B)} (\theta^2 + \gamma^{-2}) = (2m + 1)\pi, \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (27)$$

When the condition $\left| \frac{\chi'_1 + r\chi'_2}{1+r} \right| > |\chi'_c|$ is fulfilled, the interference term $T_{int}^{(s)}$ can exceed the contribution of each term of TR in the resulting yield of DTR. In special case when averaged dielectric susceptibility of periodical medium and dielectric susceptibility of amorphous medium are equal

$$\frac{\chi'_1 + r\chi'_2}{1+r} = \chi'_c, \quad (28)$$

from (24) under conditions (26), (27) and (28) we can obtain the expression

$$\omega \frac{d^2 N_{DTR}^{(s)}}{d\omega d\Omega} = 9 \frac{e^2}{4\pi^2} P^{(s)^2} \theta^2 \left(\frac{1}{\theta^2 + \gamma^{-2} - \frac{\chi'_1 + r\chi'_2}{1+r}} - \frac{1}{\theta^2 + \gamma^{-2}} \right)^2 R_{DTR}^{(s)}, \quad (29)$$

which shows that under these conditions the DTR yield from considered three-layered target will exceed the DTR yield from periodic layered medium 9 times.

The angular density of DTR can be calculated by formula

$$\frac{dN_{DTR}^{(s)}}{d\Omega} = F_{DTR}^{(s)}(\theta) = F_1^{(s)}(\theta) + F_2^{(s)}(\theta) + F_{int}^{(s)}(\theta), \quad (30a)$$

where

$$F_{1,2,int}^{(s)}(\theta) = \frac{T^2 \omega_B}{2\pi^2 n^2 L_{ext}^{(s)}} \int_{-\infty}^{+\infty} T_{1,2,int}^{(s)} d\xi^{(s)}(\omega). \quad (30b)$$

$$\frac{dN_{DTR}^{(s)}}{d\Omega} = F_{PXR}^{(s)}(\theta) = \frac{T^2 \omega_B}{2\pi^2 n^2 L_{ext}^{(s)}} \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{P^{(s)^2}}{|\chi'_0|} \cdot \frac{\Omega^2}{(\Omega_0^2 + 1)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{PXR}^{(s)} d\xi^{(s)}(\omega). \quad (30c)$$

4. Numerical calculations

The calculations were fulfilled under conditions (26), (27) and (28) i.e. under condition of ninefold increase in spectral-angular density of DTR.

Parameters of calculation: amorphous medium Germanium (Ge), thickness of amorphous medium is $c = 1.2 \mu m$, the vacuum layer thickness is $a = 9.6 \mu m$; Periodic layered structure is carbon (C) – tungsten (W), thickness of layered structure is $b = 1 \mu m$, thicknesses of the layers are $l_1 = 10.64 \cdot 10^{-4} \mu m$ and $l_2 = 9.36 \cdot 10^{-4} \mu m$, period $T = l_1 + l_2$, the angle between reflecting layers and target surface is $\delta = 4.6^\circ$, energy of relativistic electron is $E = 500 MeV$, the angle between the direction of the electron velocity and reflecting layers is $\theta_B = 2.3^\circ$, Bragg frequency $\omega_B = 8 keV$. The calculations were fulfilled for σ -polarized waves ($s = 1$) for the first harmonic $n = 1$. In Fig.2 the curves built by formulas (24) describing the spectral-angular density of DTR in maximum ($\theta_{\perp} = 1 mrad$) are represented. One of the curves is plotted for such thicknesses of amorphous and vacuum layers when the conditions of constructive interference (26) and (27) are satisfied. Other curve is plotted for the case of absence of



amorphous layer. One can see that the amorphous layer (plate) is able to considerably increase the spectral-angular density of DTR. In Fig.3 the curves describing the angular densities of DTR and PXR are plotted by formulas (30). It is seen that the contribution of PXR under condition of Fig.3 is immaterial because the thickness of layer made of periodical multilayer medium is small ($b = 1\mu m$). The strong oscillations appear in angular density under changes in the observation angle as a result of transition from constructive interference to destructive one in superposition of transition radiation from amorphous layer and inlet surface of lamellar layer.

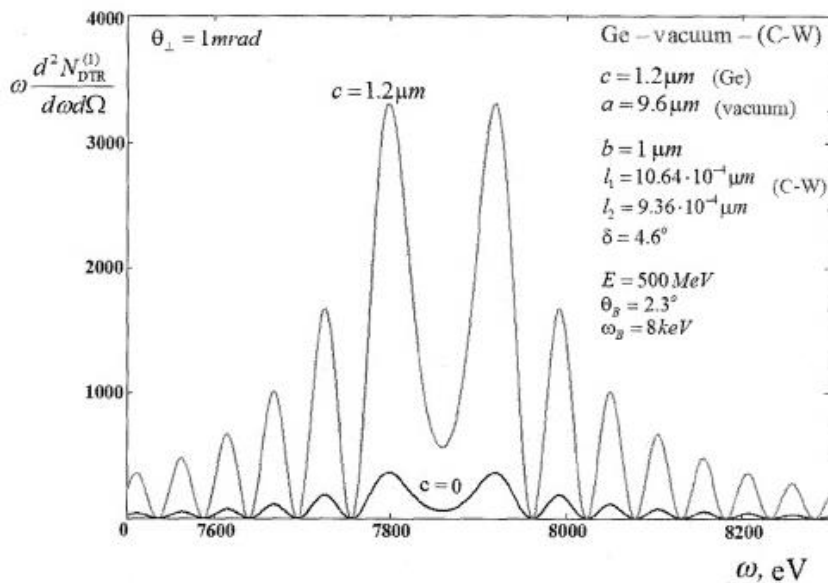


Fig.2 Spectral-angular density of DTR in the three-layer structure ($c = 1.2 \mu m$) and in the case of absence of amorphous layer ($c=0$).

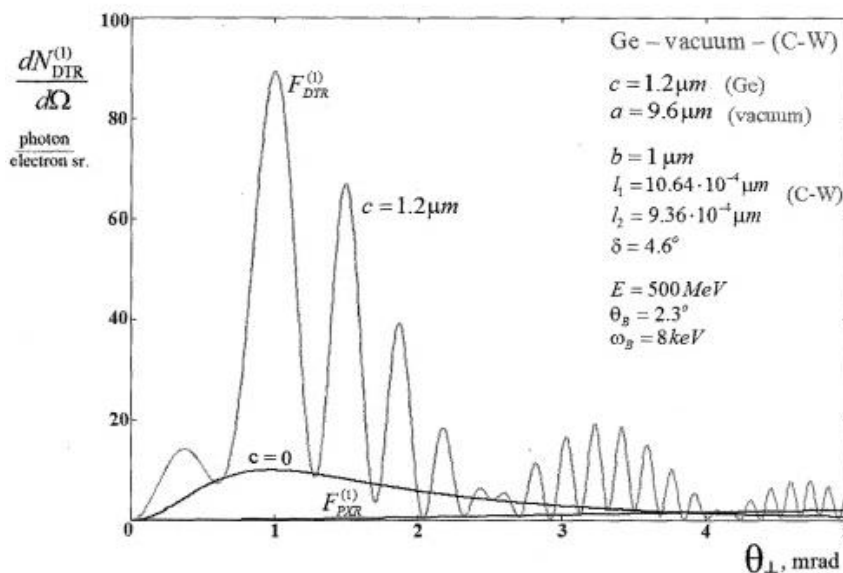


Fig.3. The angular density of DTR by a relativistic electron from three-layered structure and the same in case of absence ($c=0$) of the amorphous layer. The angular density of PXR under such energy of electrons is considerably lower and independent on thickness of amorphous layer.

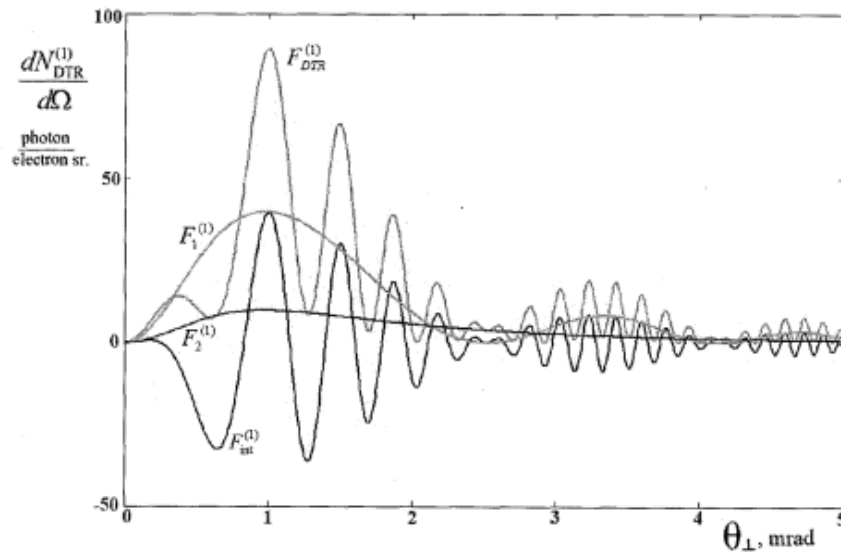


Fig. 4 The contribution of TR from the amorphous layer $F_1^{(1)}$, from the entrance boundary of the multilayered medium $F_2^{(1)}$ and their interference term $F_{int}^{(1)}$ into the angular density of DTR.

Conclusion

A theory of coherent X-ray radiation of relativistic electrons crossing the three-layer structure "amorphous layer- vacuum-periodic layered medium" have been developed within the framework of dynamical diffraction theory. The expressions describing PXR and DTR by relativistic electron have been derived. It is shown that the spectral-angular density of the DTR can be substantially increased due to the constructive interference of TR waves from different boundaries of amorphous layer, as well as due to the constructive interference of waves of transition radiation from the amorphous layer and the entrance boundary of the periodic layered target.

Acknowledgements

This work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project of the state task № 3.500.2014 / K in the field of science and state task №2014 / 420).

References

1. Ginzburg V. L. and Tsytovich V. N., Transition Radiation and Transition Scattering, M.: Nauka., 1984; Adam Hilger, Bristol, United Kingdom, 1990).
2. Caticha A. // Phys. Rev. A, 1989. V.40. P. 4322.
3. Baryshevsky V. //Nucl. Instr. and Meth. A, 1997. V. 122. P.13.
4. Artru X., Rullhusen P.// Nucl. Instr. and Meth. B, 1998. V. 145. P. 1.
5. Nasonov N. // Phys. Lett. A, 1998. V. 246. P. 148.
6. Blazhevich S. V., Kolosova I. V., Noskov A.V.// J. Exp. Theor. Phys., 2012. V. 114. No. 4. Pp. 547–554.
7. Ter-Mikaelyan M. L., Influence of the Medium on Electromagnetic Processes at High Energies (Akad. Nauk ArmSSR, Yerevan, 1969), 459 p. [in Russian].
8. Garibyan G. M. and Yang C.// Sov. Phys. JETP, 1997. V. 34. P. 495.
9. Baryshevskii V. G. and Feranchuk I. D.// Sov. Phys. JETP, 1971. V. 34. P. 502.
10. Nasonov N. / Physics Letters A, 2001. V. 292. P. 146.
11. Nasonov N., Noskov A.// Nucl. Instr. Meth. In Phys. Res. B, 2003. V. 201. P. 67.
12. Blazhevich S.V., Noskov A.V.//Nucl. Instr. and Meth. B, 2006. V. 252. P.69.
13. S.V. Blazhevich, A.V. Noskov, Nucl. Instr. and Meth. B 266 (2008) 3770.
14. Blazhevich S., Noskov A.// J. Exp. Theor. Phys., 2009. V. 109. P.901.



15. Andreyashkin M. Yu., Zabaev V. N., Ioshida K., Kaplin V. V., Rozum E. I., Uglov S. R., Endo I. // JETP Letters, 1995. V. 62. No. 10. Pp. 791-796.
16. Andreyashkin M. Yu., Zabaev V. N. et al. // JETP Letters, 1997. V. 65. No. 10. Pp. 594-774.
17. Nakayama K., Sekimura M., Yanase I., Endo I., Takashima, Kaplin V., Potylitsin A. // Nucl. Instr. and Meth. B., 1998. V. 145. Pp. 236.
18. Takashima Y., Aramitsu K., Endo I., Fukumi A. et al. // Nucl. Instr. and Meth. B., 1998. V. 145. P. 25.
19. Kaplin V.V., Kuznetsov S.I., Timchenko N.A., Uglov S.R., Zabaev V.N. // Nucl. Instr. and Meth. B., 2001. V. 173. P. 238.
20. Blazhevich S.V., Zagorodnyuk R.A., Noskov A.V. // Nucl. Instr. and Meth. B., 2015. V. 355, 15 July 2015, Pages 114-120
21. S. V. Blazhevich, R. A. Zagorodnyuk, A.V. Noskov // J. Exp. Theor. Phys., 2014, Vol. 119, No. 4. Pp. 641-650.
22. Blazhevich S.V., Noskov A.V. // J. Exp. Theor. Phys., 2014 Vol. 118 No. 4. Pp. 550-559.
23. Bazylev V., Zhevago N., Emission From Fast Particles Moving in a Medium and External Fields, Nauka, USSR, Moscow, 1987 (in Russian).
24. Z. Pinsker, Dynamical Scattering of X-rays in Crystals, Springer, Berlin, 1984.

УДК 544.226; 544. 016

**ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ПОДМАГНИЧИВАЮЩЕЙ СРЕДЫ
В ВИДЕ НАНОКРИСТАЛЛОВ ГЕКСАГОНАЛЬНЫХ ФЕРРИТОВ**

**FUNCTIONAL PARAMETERS OF HEXAGONAL NANOCRYSTALS OF FERRITE
AS MEDIUM FOR MAGNETIZING**

**С.В.Блажевич¹, Л.П.Ольховик², Т.Г. Кузьмичева¹, Л.В.Фурда¹,
Н.В.Ткаченко², Е.В.Шуринова²
S.V. Blazhevich¹, T.G. Kuzmicheva¹, L.V. Furda¹, L.P. Ol`khovik²,
N.V. Tkachenko², E.V. Shurinova²**

¹Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Белгород, Россия 308015, ул. Победы, д. 85;

¹National Research University "Belgorod State University" (NRU "BelSU"), Pobedy 85 Belgorod, Russia, 308015

²Харьковский национальный университет. Харьков, Украина 61022, пл. Свободы, 4

²V. N. Karazin National University (KNU), Svobody square, 4, Kharkov, Ukraine

E-mail: blazh@bsu.edu.ru

Ключевые слова: гексаферрит, подмагничивающая нанодисперсная среда, максимальная магнитная энергия.

Key words: hexaferrite, magnetizing environment, the maximum magnetic energy.

Аннотация: Проведено комплексное исследование функциональных магнитных характеристик высокоанизотропных нано- и микродисперсных ферритовых материалов, рекомендуемых к применению в качестве подмагничивающих сред в медицине и биотехнологиях. Результаты исследования показывают, что в дополнение к улучшенной биосовместимости синтезированный материал обладает достаточно высокими функциональными магнитными характеристиками. В частности, синтезированный порошковый материал имеет сравнительно высокую максимальную магнитную энергию. При интерпретации результатов учитывалось влияние термических флуктуаций на технические характеристики исследуемого состава.

Resume: The comprehensive study of the functional magnetic characteristics of highly anisotropic nano- and micro-dispersed ferrite materials that are recommended for application as a magnetizing medium in medicine and biotechnology has been carried out. The results of the investigation show that the synthesized material in addition to its improved biocompatibility possesses high functional and magnet characteristics. Particularly the synthesized powder material has a sufficiently high maximal magnetic energy. The effect of thermal fluctuations on the technical characteristics of the studied composition was taken into account under the result interpretation.

Введение

Основанием для изучения фундаментальных свойств индивидуальных частиц высокоанизотропных порошковых ферритовых материалов служит широкая сфера их применений в технике (подмагничивающая, записывающая и радиопоглощающая среда), а также в современных медико-биологических технологиях (адресная доставка лекарств на клеточном уровне, усиление контраста магнито-резонансного изображения и другие). К функциональным параметрам данных материалов прежде всего относятся максимальная магнитная энергия BH_{\max} , коэрцитивная сила H_c , намагниченность насыщения I_s , остаточная намагниченность I_r .

Цель данной работы состоит в аттестации синтезированной биосовместимой подмагничивающей среды на соответствие требованиям, предъявляемым к подмагничивающей среде в медицине и технике.

В работе решены следующие задачи:

Синтезирован порошковый образец гексагонального феррита состава $Ca_{0,5}Ba_{0,5}Fe_{12}O_{19}$. Синтез порошкового образца проводился с использованием криохимической технологии [1, 2, 3]. Проведена аттестация образца на соответствие требованиям, предъявляемым к подмагничивающей среде в биомедицинских технологиях и технике. Для исследования поля магнитной анизотропии использовался метод, развитый Н. Pfeiffer [4, 5].

Методы

Принципиальная блок-схема способа получения ферритовых порошков с использованием элементов криохимической технологии приведена на рис. 1. На стадии замораживания проводилось распыление раствора, представляющего собой смесь растворов исходных веществ в заданном стехиометрическом соотношении, непосредственно в инертный хладагент. В качестве такового использовался жидкий азот (~10 литров азота на 1 литр раствора). В системе устанавливалось фиксированное давление (0.12 – 0.2 атм.), под действием которого рабочая жидкость подавалась в вихревую камеру форсунки. В результате, струя раствора разбивалась на отдельные капли диаметром 3–70 мкм, которые, попадая в жидкий азот, быстро кристаллизовались. В качестве инертного газа, нагнетаемого в установку под давлением, использовался аргон.

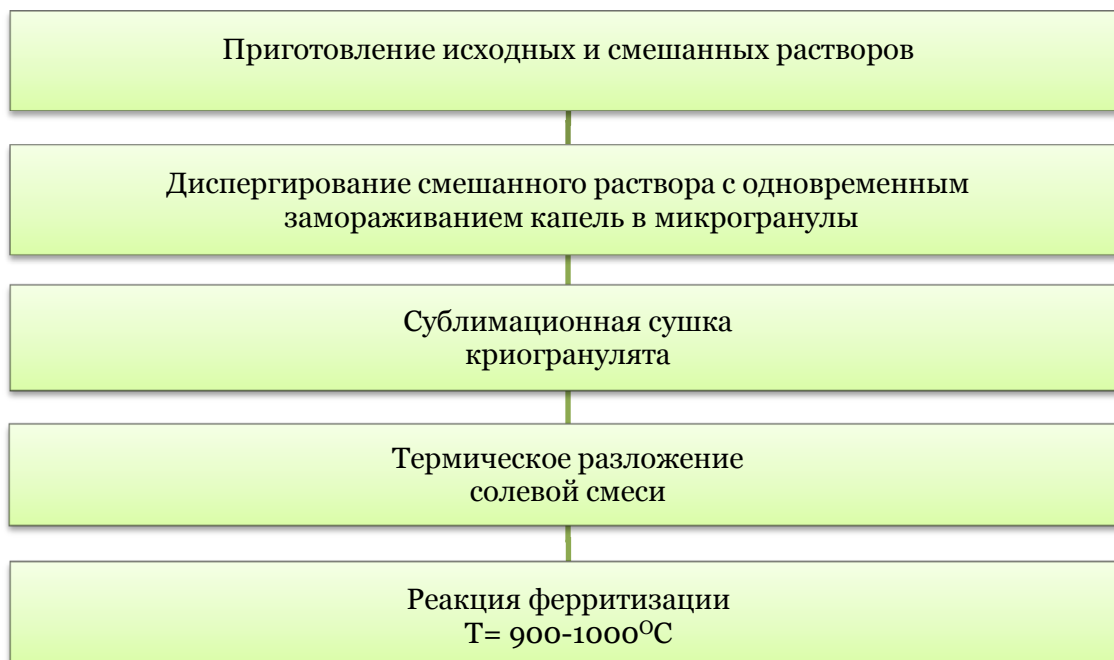


Рис. 1. Блок-схема метода получения нанодисперсных ферритовых порошков с использованием элементов криохимической технологии [1].

Удаление растворителя из криогранулята проводилось методом сублимационной сушки – процесса перехода растворителя из кристаллического в газообразное состояние, минуя жидкую фазу. Это позволило свести к минимуму агломерацию сформировавшихся на стадии замораживания частиц продукта, благодаря исключению появления в материале жидкой фазы.

С целью ограничения роста размера частиц температура отжига поддерживалась равной 900°C, что является предельно низким значением, обеспечивающим полную ферритизацию состава.

При аттестации синтезированного состава на соответствие требованиям, предъявляемым к высокодисперсной подмагничивающей среде, использовались данные электронной микроскопии (размер и морфология частиц), а также распределение частиц по полям эффективной магнитной

анизотропии ([4, 5]) в интервале температур 300-600К и значения максимальной магнитной энергии [6] в диапазоне температур 300-600К.

В связи с наличием в исследуемой системе частиц с объемом близким к критическому суперпарамагнитному, учитывалось влияние термических флуктуаций на функциональные и технические характеристики: коэрцитивную силу H_c и поле магнитной анизотропии H_a .

Электронно-микроскопические исследования проводились на просвечивающем электронном микроскопе Selmi ТЕМ-125К.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ДИСКУССИЯ

Результаты электронно-микроскопических исследований порошкового образца гексаферрита приведены на рис. 2. Видно, что размер частиц, в основном, соответствует нанодисперсному диапазону. Однако в порошке было обнаружено небольшое количество микрокристаллических пластинчатых частиц с морфологией, близкой к шестиграннику, что подтверждает и фазовый состав порошка.

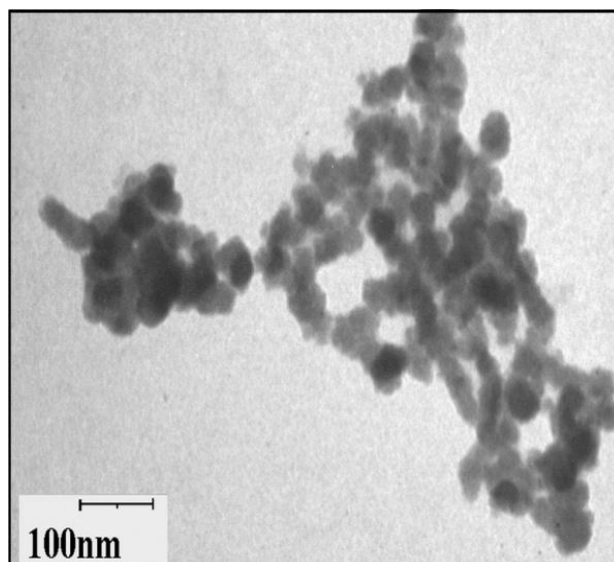


Рис.2. Фрагмент электронно-микроскопического снимка синтезированного нанодисперсного ферритового порошка.

Поле магнитной анизотропии H_a является одним из основных параметров магнитного материала. Вследствие того, что любая высокодисперсная система, независимо от способа ее получения, даже при условии идентичности частиц по химическому составу, имеет распределение частиц по размерам, она характеризуется не единственным значением H_a , а некоторым распределением по полям анизотропии. Знание этого распределения важно не только для различных технических применений, в частности, для техники магнитной записи, но и с точки зрения исследования фундаментальных механизмов формирования анизотропных свойств систем малых частиц. Это касается анализа долевых вкладов в эффективную магнитную анизотропию, как магнитокристаллической анизотропии, так и анизотропии формы частиц и анизотропии структурно-дефектного приповерхностного слоя [7, 8].

В настоящей работе был применен метод исследования поля магнитной анизотропии, развитый Н. Pfeiffer [4]. В первом приближении функция распределения частиц по полям анизотропии

$$f(H_a) = \frac{d(I_r)}{dH} \quad (1)$$

где I_r – остаточная намагниченность. Т.е. для получения распределения частиц по полям анизотропии необходимо измерить и продифференцировать полевою зависимость остаточной намагниченности.

Для получения зависимости $I_r(H)$ на плотноупакованном (фактор упаковки $p = 0.4$) термически размагниченном порошковом образце с хаотической ориентацией частиц измерялись петли гистерезиса при постепенно увеличивающемся значении максимального поля измерения (вплоть до 20 кЭ). Измерения были проведены в интервале температур 300–600 К (рис. 3).

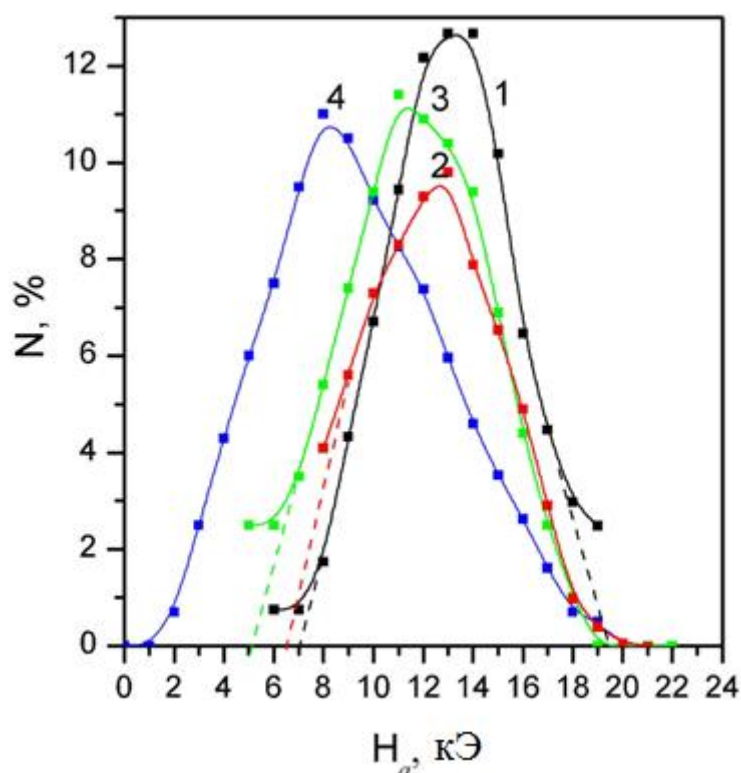


Рис. 3. Распределение частиц по полям эффективной магнитной анизотропии для ряда температур: 1- 300К; 2- 400К; 3- 500К; 4- 600К.

Для описания магнитных свойств малых частиц (или макроаналога при высоких температурах) важным моментом является учет термических флуктуаций. Данная процедура позволяет определить внутренние анизотропные свойства системы частиц. Поскольку, как это было установлено в работе [2], частицы исследуемой системы по объемам удовлетворяют критерию малых Стонер-Вольфартовских частиц $V_{SO} < V < 1000 \cdot V_{SO}$; (V_{SO} – критический суперпарамагнитный объем), возникла необходимость учета термических флуктуаций, согласно формуле:

$$\tilde{H}_a = z \cdot H_a, \tag{2}$$

где $(z-1) \cdot z^{-0.3} = \left(\frac{50 \cdot k \cdot T}{I_s \cdot H_a \cdot V} \right)^{0.7}$ [5], H_a и \tilde{H}_a – экспериментальное и истинное значения

полей анизотропии соответственно, I_s – намагниченность насыщения, V - объем частицы.

Из рис. 4 видно, что отличие полученной экспериментально коэрцитивной силы от исправленной составляет от 20% при 300К до 33% при 600К.

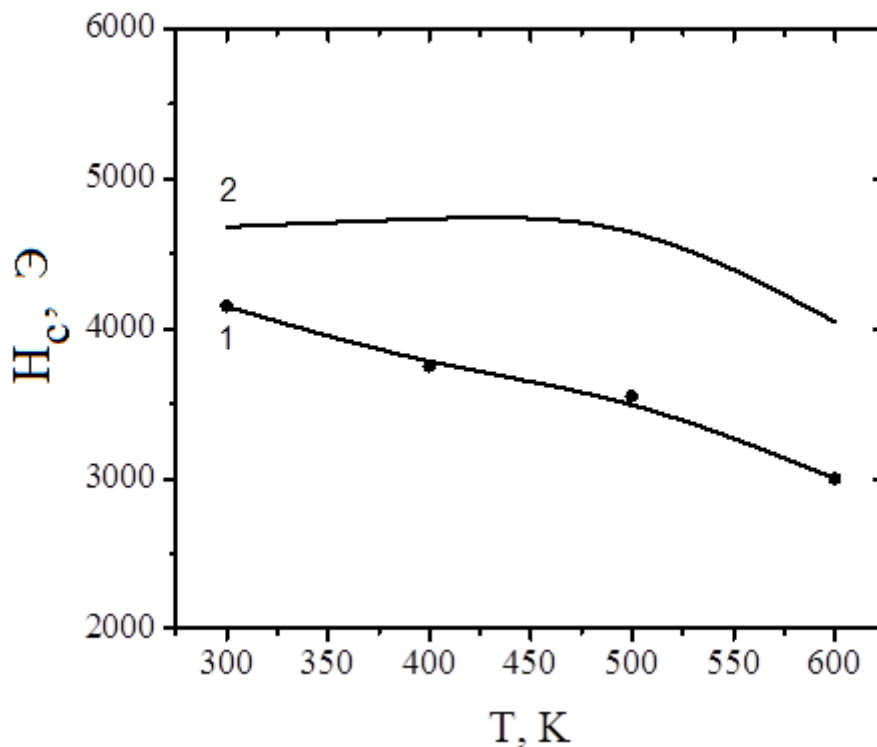


Рис. 4. Коэрцитивная сила в зависимости от температуры: 1 – без учета влияния термических флуктуаций, 2 – с учетом влияния термических флуктуаций.

Функциональные магнитные параметры высокодисперсных ферритовых материалов: коэрцитивная сила (H_c), остаточная намагниченность (I_r) и максимальная магнитная энергия (BH_{max}) были определены в результате исследования процессов намагничивания и размагничивания. Исследования проводились на предварительно размагниченных неориентированных порошковых образцах с фактором упаковки $P = \frac{\rho_{рек.}}{\rho_{порош.}} \cong 0.4$, (ρ - плотность). Измерения проводились на маятниковом магнитометре лабораторного типа в полях от 1 до 18 кЭ при 300К (рис. 5).

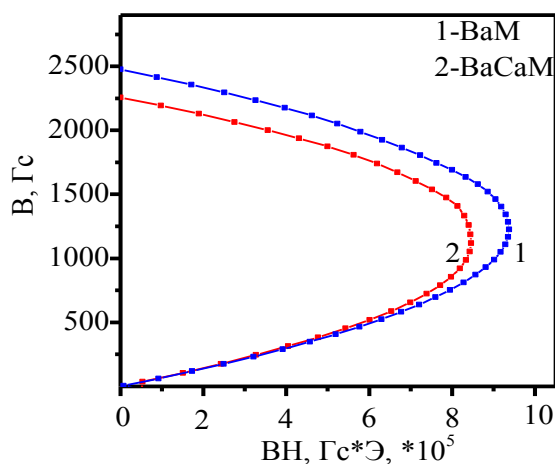


Рис. 5. Зависимость магнитной энергии для двух составов: (1) базового микродисперсного гексаферрита бария; (2) кальцийзамещенного гексаферрита бария (нано+микро).

Как видно из рис.5, максимальный результат по BH_{\max} для системы неориентированных частиц относится к микродисперсной системе базового состава $BaFe_{12}O_{19}$ [9, 10]. В то же время, синтезированный кальцийсодержащий порошок [11] наряду с улучшенной биосовместимостью (за счет введения ионов кальция), имеет достаточно близкое к базовому аналогу значение максимальной магнитной энергии, а именно, $BH_{\max} = 8.45 \cdot 10^5 \cdot \text{Гс} \cdot \text{Э}$.

В связи с полученными высокими значениями BH_{\max} при 300К представляло интерес провести исследование данной характеристики во всем интервале температур (как терапевтическом, так и техническом). Полученные результаты приведены на Рис. 6.

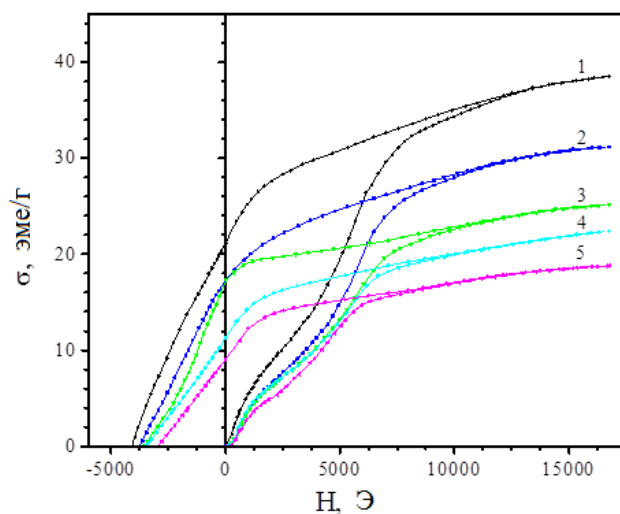


Рис. 6. Основные кривые и размагничивающие части предельных петель гистерезиса для ряда температур: 1-300К, 2-400К, 3- 500К, 4- 550К, 5- 600К.

По размагничивающей части петель гистерезиса (Рис. 6) определены коэрцитивная сила H_c и удельная (на 1 единицу массы образца) остаточная намагниченность σ_r . Далее по полученным данным были рассчитаны B_r и $B H_c \equiv H_c$, а затем построена зависимость $(BH) = f(B)$ для ряда температур (Рис. 7).

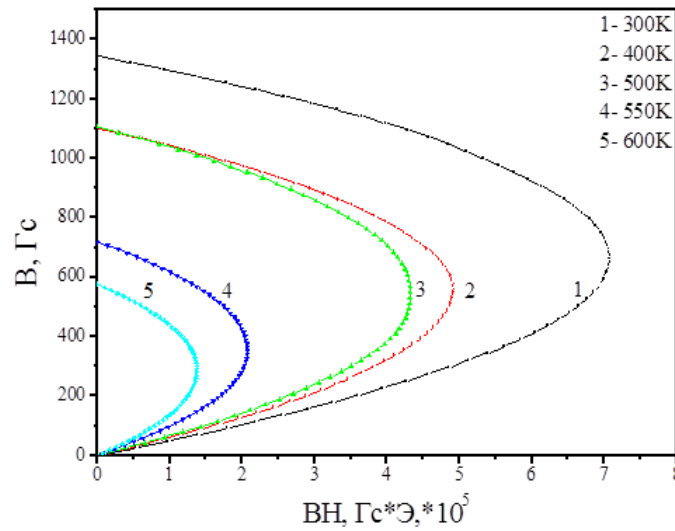


Рис. 7. Зависимость магнитной энергии от магнитной индукции в диапазоне температур 300-600К.

Построив зависимость BH_{\max} от температуры (рис. 8), мы установили, что во всем терапевтическом (300-350 К) и техническом (300-400 К) диапазонах максимальная магнитная энергия исследуемого состава сохраняет высокое значение.

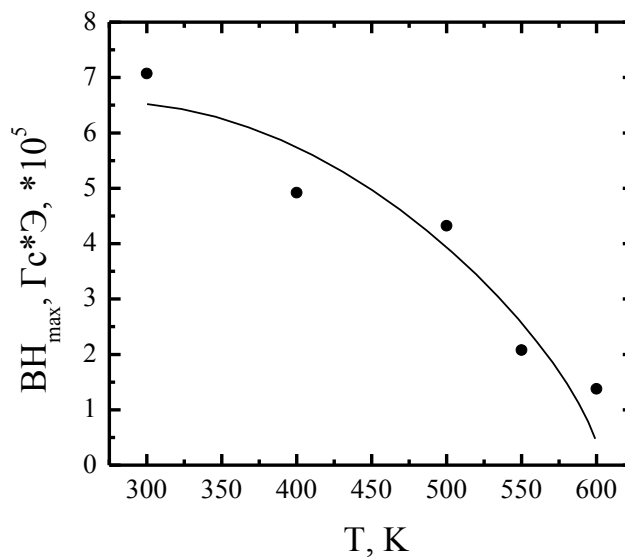


Рис. 8. Зависимость максимальной магнитной энергии от температуры.



Заключение

В результате исследований, проведенных в настоящей работе, определены функциональные для подмагничивающей среды магнитные характеристики (намагниченность насыщения, коэрцитивная сила, максимальная магнитная энергия) синтезированного с помощью криохимической технологии высокодисперсного кальцийсодержащего гексаферрита и проведено сравнение с базовым бариевым гексаферритом. Проведен учет влияния термических флуктуаций на технические характеристики исследуемого состава. Установлено, что отличие истинной коэрцитивной силы от полученной экспериментально, связанное с наличием в системе малых Стонер-Вольфартовских частиц, составляет от 20% при 300К до 33% при 600К. Показано, что наряду с улучшенной биосовместимостью (за счет введения ионов кальция в структуру феррита), синтезированный порошковый материал обладает достаточно высокой максимальной магнитной энергией; $BH_{\max} = 8.45 \cdot 10^5 \cdot \text{Гс} \cdot \text{Э}$, которая всего на 6 % ниже, чем для базового состава. Показано, что во всем терапевтическом (300-350К) и техническом (300-400 К) диапазонах максимальная магнитная энергия исследуемого состава сохраняет высокое значение, что позволяет рекомендовать данную систему нанокристаллов в качестве подмагничивающей среды для технического и медико-биологического применения.

Таким образом, сочетание высоких значений функциональных параметров (намагниченности насыщения I_s , коэрцитивной силы H_c , максимальной магнитной энергии BH_{\max}) и улучшенной биосовместимости кальцийсодержащего феррита позволяют рекомендовать разработанный материал в медико-фармацевтическую практику для создания подмагничивающей среды в виде композиционных ферроэластов, в состав которых входит 90% (мас.) магнитной компоненты.

Литература

1. Л.П. Ольховик, Н.М. Борисова, Т.Г. Кузьмичева, В.П. Шабатин //Функциональные материалы. 1996. – Т.3, № 1. – С.84 – 87.
2. Ольховик Л.П //Дисс. докт. физ.-мат. наук: 01.04.11. – Х., 2006. – 317 с.
3. S.V. Blazhevich, L.P. Ol'khovik, A.S. Kamzin et al. // Protection of Metals and Physical Chemistry of Surfaces. – 2011. – Vol.47, №5.-P. 638-644.
4. Pfeiffer H //Phys. Stat. Sol (a). – 1990. – Vol.118. – P.295 – 306.
5. Pfeiffer H. //Phys. Stat. Sol (a). – 1990. – Vol.120.- P.233-245.
6. А.С. Камзин, Л.П. Ольховик, В.Л. Розенбаум, Г. Клингельхофер, Б. Штал, Р. Галлерт // ФТТ.- Т.38, № 9.- С.2823-2830.
7. Ю.А. Мамалуй, Л.П. Ольховик, Л.Ф. Чечерская, М.Н. Шипко //УФЖ. – 1982. – Т.27, № 10. – С.1580 – 1582.
8. С.Н. Зиненко, А.А. Мураховский, Л.П. Ольховик, З.И. Сизова, Е.В. Шуринова, А.С. Камзин //ЖЭТФ. – 2003.- Т.123, вып. 5.- С.1073 – 1081.
9. N.M. Borisova, Z.V. Golubenko, T.G. Kuz'micheva, L.P. Ol'khovik, V.P. Shabatin // J.Magn.Magn.Mater.- 1992.- V.114.- P.317-328.
10. Kuz'micheva T.G., Ol'khovik L.P., Shabatin V.P. // IEEE Trans.Magn.- 1995.- V.31, № 1. – P.800-803.
11. К.А. Mozul', L.P. Ol'khovik, E.V. Shurinova, S.V. Blazhevich, T.G. Kuz'micheva, S.V. Chernikov, A.S. Kamzin, //Physics of the Solid State, 2011.Vol. 53, No. 11, pp. 2284–2289.

References

1. L.P. Olhovick, N.M. Borisova, T.G.Kuzmicheva, V.P. Shabatin // Functional Materials. – 1996. – Т.3, № 1. – С.84 – 87.
2. L.P. Olhovick /Dis. doct. fiz.-mat. science: 01.04.11. – X., 2006. – 317 с.
3. S.V. Blazhevich, L.P. Ol'khovik, A.S. Kamzin et al. // Protection of Metals and Physical Chemistry of Surfaces. – 2011. – Vol.47, №5.-P. 638-644.
4. Pfeiffer H //Phys. Stat. Sol (a). – 1990. – Vol.118. – P.295 – 306.
5. Pfeiffer H. //Phys. Stat. Sol (a). – 1990. – Vol.120.- P.233-245.
6. A.S. Kamzin, L.P. Olhovick, V.L. Rozembaum, G. Klingelhofer, B. Shtal, R. Gallert // FTT. – Т.38, № 9.- С.2823-2830.
7. U.A. Mamaluj, L.P. Olhovick, L.F. Checherskaya, M.N. Shipko //UFZH. – 1982. – Т.27, № 10. – С.1580 – 1582.
8. S.N. Zinenko, A.A. Murahovskij, L.P. Olhovick, Z.I. Sizova, E.V. Shurina, A.S. Kamzin // ZhETF. – 2003.- Т.123, V. 5.- С.1073 – 1081.
9. N.M. Borisova, Z.V. Golubenko, T.G. Kuz'micheva, L.P. Ol'khovik, V.P. Shabatin // J.Magn.Magn.Mater.- 1992.- V.114.- P.317-328.
10. Kuz'micheva T.G., Ol'khovik L.P., Shabatin V.P. // IEEE Trans.Magn.- 1995.- V.31, № 1.- P.800-803.
11. K.A. Mozul', L.P. Ol'khovik, E.V. Shurina, S.V. Blazhevich, T.G. Kuz'micheva, S.V. Chernikov, A.S. Kamzin, //Physics of the Solid State, 2011.Vol. 53, No. 11, pp. 2284–2289.



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ РАЗЛИЧНОЙ ГЕОМЕТРИИ

MATHEMATICAL MODELING OF FLUID FILTRATION IN A DIFFERENT GEOMETRIES POROUS MEDIA

¹О.В. Гальцев, О.А. Гальцева
O.V. Galtsev, O.A. Galtseva

¹Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia
E-mail: galtsev_o@bsu.edu.ru; galtseva@bsu.edu.ru

Ключевые слова: задача со свободной границей, фильтрация жидкости, упругая пористая среда
Key words: free boundary problem, fluid filtration, elastic porous media

Аннотация. Настоящая работа посвящена двум моделям фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей различной плотности, разделенных свободной границей в поро-упругом пространстве. В работе приведены результаты численной аппроксимации задачи для вязко-упругой фильтрации точными микроскопическими моделями со свободной границей для структур порового пространства различной геометрии.

Resume. This paper is devoted to two filtration models of two immiscible incompressible fluids with different densities, separated by a free boundary in the pore-elastic space. There are results of numerical approximation for viscoelastic filtration by microscopic model with a free boundary for a different structure of the pore space geometry in this article.

Введение

В работе рассматривается развитие возмущений при рэлей-тейлоровской неустойчивости в неоднородной жидкости, занимающей поры в твердом скелете. Помимо несомненного теоретического интереса, эта задача имеет большое значение для ряда важных практических проблем, например, при изучении вытеснения одной жидкости другой в пористом грунте.

Большой вклад в развитие обсуждаемой проблемы внесли работы Ферми [7]. В них рассматривается развитие тейлоровской неустойчивости на границе жидкость – вакуум в линейном и нелинейном случаях, а также на границе двух жидкостей: тяжелая – легкая.

При изучении этого эффекта прослеживаются следующие ярко выраженные стадии: линейная, промежуточная, регулярная, асимптотическая и турбулентная [1], [2]. Рэлей-Тейлоровская неустойчивость наиболее исследована для случая плоской поверхности раздела и стремящегося к бесконечности отношения плотностей тяжелой и легкой жидкостей. Линейная стадия подробно изучена в классических работах Рэля, Тейлора и Льюиса [3],[4],[5], регулярная асимптотическая – в работах Биркгофа [6], в [8] развита феноменологическая теория турбулентной стадии, а в [2] высказаны некоторые соображения о механизме ее образования.

Однако аналитического математического аппарата для анализа в целом рэлей-тейлоровской неустойчивости в идеальной жидкости недостаточно. Экспериментальные же исследования весьма трудоемки. Наиболее полная информация может быть получена из численных расчетов.

Постановка задачи

Задача совместного движения двух жидкостей рассматривалось в области $\Omega^\pm(t)$, где движение первой жидкости в области $\Omega^+(t)$ с постоянной вязкостью μ^+ и постоянной плотностью ρ_f^+ описывается системой уравнений Стокса

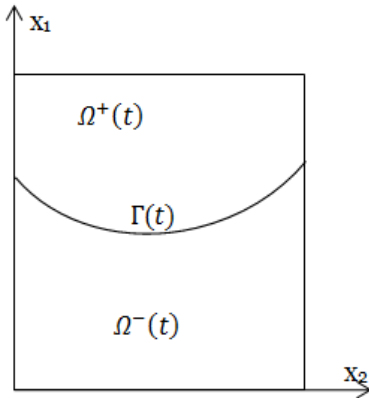


Рис.1. Область $\Omega^\pm(t)$.

$$\alpha_\mu \Delta \mathbf{u}^+ - \nabla p + \rho^+ \mathbf{g} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}^+ = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega^+(t), \quad (1)$$

для микроскопической скорости \mathbf{u}^+ и давления p_f^+ первой жидкости.

Соответственно, движение второй жидкости в области $\Omega^-(t)$ с постоянной вязкостью μ^- и постоянной плотностью ρ_f^- описывается аналогичной системой уравнений Стокса

$$\alpha_\mu \Delta \mathbf{u}^- - \nabla p + \rho^- \mathbf{g} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}^- = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega^-(t), \quad (2)$$

для микроскопической скорости \mathbf{u}^- и давления p_f^- первой жидкости.

где $\alpha_\mu = \frac{2\mu}{\nu L g \rho_0}$, L – характерный размер рассматриваемой области,

g – сила тяжести, μ есть вязкость жидкости.

На свободной границе $\Gamma(t) = \partial\Omega^+(t) \cap \partial\Omega^-(t)$, разделяющей обе жидкости, давления и нормальные скорости непрерывны:

$$p^+ = p^-, \quad \mathbf{x} \in \Gamma(t), \quad (3)$$

$$\mathbf{u}^+ \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}^- \cdot \mathbf{n} = U_n, \quad \mathbf{x} \in \Gamma(t), \quad (4)$$

где \mathbf{n} есть единичный вектор нормали к границе $\Gamma(t)$ в точке $\mathbf{x} \in \Gamma(t)$ и U_n есть скорость границы $\Gamma(t)$ в направлении нормали \mathbf{n} в точке $\mathbf{x} \in \Gamma(t)$.

Граница $\Gamma(t)$ есть материальная поверхность, то есть во время движения эта поверхность состоит из одних и тех же материальных точек. Этот факт позволяет сформулировать понятие слабого решения задачи. А именно, определим давление p неоднородной жидкости

$$p = p^+, \text{ если } \mathbf{x} \in \Omega^+(t), \text{ и } p = p^-, \text{ если } \mathbf{x} \in \Omega^-(t), \quad (5)$$

и скорости \mathbf{u}

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^+, \text{ если } \mathbf{x} \in \Omega^+(t), \text{ и } \mathbf{u} = \mathbf{u}^- \text{ если } \mathbf{x} \in \Omega^-(t). \quad (6)$$

Тогда неизвестные функции \mathbf{u} , p и ρ будут решениями системы уравнений Стокса

$$\operatorname{div}(\alpha_\mu \nabla \cdot \mathbf{u} - p\mathbf{l}) + \rho \mathbf{g} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (7)$$



и уравнение переноса

$$\frac{d\rho}{dt} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (8)$$

Первое уравнение (уравнение Стокса) понимается в обычном смысле почти всюду в $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, а второе уравнение (уравнение неразрывности) понимается в смысле теории распределения, как интегральное тождество

$$\int_{\Omega_T} \mathbf{v} \cdot \nabla \psi \, dx dt = 0$$

для произвольной гладкой функции ψ . Аналогично, понимается уравнение переноса (8).

А именно, используя равенство

$$\varphi \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = \nabla \cdot (\mathbf{u} \rho \varphi) - \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi - \rho \varphi \nabla \cdot \mathbf{u},$$

и уравнение неразрывности получим после умножения уравнения (8) на произвольную гладкую финитную в области Ω_T функцию φ и интегрирования по частям интегральное тождество

$$\int_{\Omega_T} \rho_f \frac{d\varphi}{dt} \, dx dt = 0,$$

которое выполняется для всех таких функций φ .

Проблема дополняется однородным граничным условием

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in S = \partial \Omega, \quad t > 0, \quad (9)$$

где \mathbf{n} есть нормальный вектор к границе S , и начальным условием

$$\rho_f(\mathbf{x}, 0) = \rho_f^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (10)$$

где

$$\rho_f^0(\mathbf{x}) = \rho_f^+ = \text{const} > 0, \quad \text{если } \mathbf{x} \in \Omega_0^+ = \Omega^+(0)$$

и

$$\rho_f^0(\mathbf{x}) = \rho_f^- = \text{const} > 0, \quad \text{если } \mathbf{x} \in \Omega_0^- = \Omega^-(0).$$

В качестве численного метода реализации поставленной задачи, был выбран метод крупных частиц. Основная его идея состоит в расщеплении исходной системы дифференциальных уравнений по физическим процессам.

Моделируемая среда заменяется системой из жидких частиц, совпадающих в данный момент времени с ячейкой эйлеровой сетки. То есть исследуемая область покрывается равномерной по x и y сеткой ячеек

$$\Omega_f = \left(\begin{array}{l} x_{i+1/2} = (i+1/2)h, \Delta x > 0, i = 0, 1, \dots, L; (L+1)\Delta x = X_{max} \\ y_{j+1/2} = (j+1/2)\Delta y, h > 0, j = 0, 1, \dots, M; (M+1)\Delta y = Y_{max} \end{array} \right)$$

где $\Delta y, \Delta x$ – размер шагов сетки, L и M – число ячеек сетки соответственно в направлении x, y .

Здесь используется "шахматная" сетка, то есть координаты сеточных функций разнесены в пространстве, как показано на рис.2. Это дает возможность наглядно интерпретировать каждую

ячейку как элемент объема среды, который характеризуется рассчитываемыми в его центре давлением p_{ij} и плотностью ρ_{ij} .

Следует отметить еще одно преимущество таких шаблонов. Поскольку давление рассчитывается в центре ячейки и предполагается, что рассматриваются только согласованные сетки, то есть для ячейки, смежной с границей $\partial\Omega$, сторона этой ячейки в точности совпадает с частью $\partial\Omega$, то при расчетах нет необходимости знать условия для давления на $\partial\Omega$.

Стационарное решение задачи получается в результате установления, поэтому весь процесс вычислений состоит из многократного повторения шагов по времени.

Расчет каждого временного шага в свою очередь разбивается на три этапа:

- Пренебрегаем всеми эффектами, связанными с перемещением жидкости; на этом этапе на фиксированной эйлеровой сетке определяются промежуточные значения искомых параметров потока;
- Вычисляется плотность потока массы при движении жидкости через границы эйлеровой ячейки;
- Определяются окончательные значения параметров потока для каждой ячейки рассматриваемой области течения.

По существу, как это и принято в методах частиц, на первом этапе рассматривается изменение за время скорости элементарного объема жидкости (крупной частицы), заключенного внутри эйлеровой ячейки. На втором этапе моделируется движение частиц через границы эйлеровых ячеек и происходит перераспределение частиц по пространству. На третьем этапе определяется за время изменение параметров потока в элементарной эйлеровой ячейке, полученной возвращением объема в исходное положение.

Таким образом, эволюция всей системы за время Δt осуществляется путем следующего расщепления: вначале изучается изменение состояния подсистем, находящихся в ячейках – крупных частиц, в предположении их замороженности или неподвижности, а затем рассматривается смещение всех частиц пропорционально их скорости и времени Δt без изменения внутреннего состояния подсистемы с последующим пересчетом расчетной сетки в начальное состояние.

Основная трудность при численном решении системы уравнений (1) – (8) связана с расчетом поля давления. Первый значительный успех в преодолении отмеченной трудности был достигнут благодаря использованию идеи искусственной сжимаемости [10]. Существо этой идеи

состоит во введении в уравнение неразрывности дополнительного члена вида $(\frac{\partial}{\partial t})(p + u^2/2)$. В

результате получается модифицированная система уравнений вида

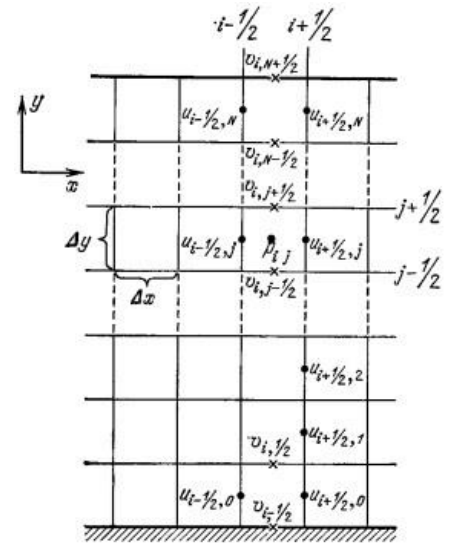


Рис.2. Шаблон расчетной сетки.



$$\alpha_\mu \Delta \mathbf{u} - \nabla p - \rho \mathbf{e}_2 = 0, \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

В нашем случае была использована классическая схема расщепления, которая и лежит в основе метода частиц в ячейках. Согласно этой схеме рассчитывается промежуточное поле скоростей \tilde{U} из уравнения

$$\alpha_\mu \Delta \tilde{U} - \rho \mathbf{e}_2 = 0, \quad (11)$$

затем ищется давление из уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \tilde{U} = 0, \quad (12)$$

найденное значение снова подставляем в исходное уравнение, тем самым найдя откорректированное значение скорости с учетом давления в расчетной ячейке. И, соответственно, на последнем шаге находим значение плотности на следующем временном шаге из уравнения переноса

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0.$$

Таким образом, на первом этапе предполагается, что перенос количества движения осуществляется лишь за счет конвекции, диффузии и внешних сил (12). Далее, на втором этапе проводится расчет полей давления. На этом этапе учитывается, что в силу уравнения неразрывности на каждом временном слое должно выполняться условие $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. И на третьем этапе, подставляя в исходное уравнение (12) значения промежуточных скоростей, с учетом давления и, решая уравнение переноса, находят "окончательные" (для данного временного слоя) поля скоростей и плотности.

Для случая декартовой системы координат и равномерной сетки двумерная разностная схема имеет вид:

$$\alpha_\mu \frac{u_{i+3/2,j} - 2u_{i+1/2,j} + u_{i-1/2,j}}{h^2} + \alpha_\mu \frac{u_{i+1/2,j+1} - 2u_{i+1/2,j} + u_{i+1/2,j-1}}{h^2} + \rho_{i+1/2,j} \mathbf{e}_1 \quad (13)$$

$$\alpha_\mu \frac{v_{i+1,j+1/2} - 2v_{i,j+1/2} + v_{i-1,j+1/2}}{h^2} + \alpha_\mu \frac{v_{i,j+3/2} - 2v_{i,j+1/2} + v_{i,j-1/2}}{h^2} + \rho_{i,j+1/2} \mathbf{e}_2 \quad (14)$$

$$\alpha_\mu \frac{\rho_{i,j}^{n+1} - \rho_{i,j}^n}{\tau} = - \frac{(\rho u)_{i+1/2,j}^{n+1} - (\rho u)_{i-1/2,j}^{n+1}}{h} - \frac{(\rho v)_{i,j+1/2}^{n+1} - (\rho v)_{i,j-1/2}^{n+1}}{h}. \quad (15)$$

При замене дифференциальной задачи конечно-разностным представлением особое внимание следует уделять аппроксимации граничных условий, так как конкретная аппроксимация последних влияет на точность метода, устойчивость схемы, а также на скорость сходимости.

В случае, когда боковые стенки – твердая поверхность, то условие непротекания представляется в виде

$$u_{-1/2,j} = 0, \quad (16)$$

а условие прилипания – в виде

$$v_{i-1/2,j+1/2} = 0. \quad)$$

Очень важна и устойчивость разностной схемы. Для выведенной нами разностной схемы характерна периодическая неустойчивость. По мере приближения к искомому (устойчивому) решению градиенты параметров потока в областях гладкого течения становятся малы. Вместе с ними становятся малыми вязкостное давление, в результате чего в этих областях вновь начинает прогрессировать неустойчивость. когда она разовьется настолько, что градиенты станут велики вязкостные члены первого дифференциального приближения опять начнут ее демпфировать, и так далее, то есть возникают автоколебания (что и позволило смоделировать вязкостные эффекты течения).

Двумерные расчеты рэлей-тейлоровской неустойчивости показали хорошие совпадения с результатами [11]. В ходе вычислений было выявлено, что на процесс в целом влияют три параметра: плотность верхней (ρ^+) и нижней (ρ^-) жидкости, а точнее их отношение $\delta = \rho^+/\rho^-$, вязкости μ^+ и μ^- жидкостей и размер пор ℓ . Изменяя эти параметры можно получить различные сценарии протекания рэлей-тейлоровской неустойчивости.

При увеличении количества капилляров четкой границы раздела двух жидкостей не наблюдается. При этом становится различимой переходная фаза $\rho^- \leq \rho \leq \rho^+$.

Заметим, что при задании начального возмущения в расчетах со сжимаемыми средами важно везде соблюдать условие $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ (за исключением поверхности раздела), иначе возникнут возмущения, которые могут исказить картину развития неустойчивости Рэлей-Тейлора.

Во втором случае нами рассматривается фильтрация жидкости в деформируемом упругом скелете. При этом предполагается, что область, занятая жидкостью, та же самая что и в первом случае и состоит из периодической структуры пор размера ℓ (в безразмерных переменных). Более точно Ω_f – область, занятая жидкостью, Ω_s – упругий скелет.

Следуя схеме, предложенной Р. Барриджем и Дж. Келлером [12], будем описывать совместное движение упругой и жидкой компонент на микроскопическом уровне системой, состоящей из уравнений Стокса и Ламэ, дополненных соответствующими граничными условиями на общей границе "жидкость – упругий скелет". А именно, движение слабо сжимаемой вязкой жидкости в области описывается стационарными уравнениями Стокса

$$\alpha_\mu \Delta \frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t} - \nabla p_f + \rho_f \mathbf{g} = 0, \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t} = 0 \quad (18)$$

для безразмерных микроскопических перемещений \mathbf{w}_f и давления p_f в жидкости, а движение упругого скелета в Ω_s описывается стационарными уравнениями Ламэ

$$\alpha_\lambda \Delta \mathbf{w}_s - \nabla p_s + \rho_s \mathbf{g} = 0, \nabla \cdot \mathbf{w}_s = 0, \quad (19)$$

для безразмерных микроскопических перемещений \mathbf{w}_s и давления в твердом скелете p_s . На общей границе Γ между жидкостью и твердым скелетом вектор перемещений и давления удовлетворяют условию непрерывности нормальных напряжений

$$(\alpha_\mu \mathbf{D}(\frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t}) - p_f \mathbf{l}) \mathbf{n} = (\alpha_\lambda \mathbf{D}(\mathbf{w}_s) - p_s \mathbf{l}) \mathbf{n}, \quad (20)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор нормали к Γ .

В (20) $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ – симметричная часть матрицы, \mathbf{l} – единичная матрица, $\alpha_\lambda = \frac{2\lambda}{Lg\rho_0}$, ρ_s –

безразмерная плотность твердого скелета, λ – постоянная Ламэ для твердой компоненты.

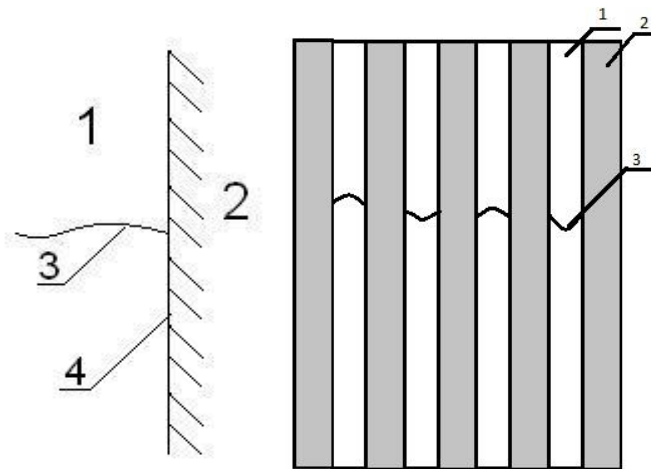


Рис. 3. 1-Область занятая жидкостью (Ω_f), 2 – упругий скелет (Ω_s), 3 – граница раздела верхней и нижней жидкостей (Γ), 4 – граница раздела жидкости и упругого скелета (S)

Для выбранной нами геометрии порового пространства к известным из первого случая параметрам, влияющим на процесс фильтрации, добавляется коэффициент упругости твердого скелета λ , который сильно влияет на процесс фильтрации. При заданном значении λ отношение δ должно находиться в определенном диапазоне, чтобы обеспечить изменение границы раздела жидкостей. В противном случае изменения положения жидкостей относительно друг друга не наблюдается. И наоборот, варьируя значение λ можно добиться устойчивого состояния двух фаз.

Уравнение совместного движения жидкости и упругого скелета будет иметь вид:

$$\nabla \cdot (\chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbf{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}) + (1 - \chi^\varepsilon) \alpha_\lambda \mathbf{D}(x, \mathbf{w}) - p) + \rho^\varepsilon = 0, \quad (21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0,$$

где χ – характеристическая функция.

Для численного моделирования вязко-упругой фильтрации на микроскопическом уровне была рассмотрена задача со свободной границей совместного движения в периодических порах

размера ℓ двух несмешивающихся жидкостей и упругого скелета был разработан и апробирован алгоритм нахождения всех неизвестных переменных, состоящий из пяти главных этапов:

- На первом этапе расчетов решалось уравнение Ламэ (20) с заданными начальными условиями перемещения \mathbf{W}_s и давления p_s и условием на границе $\mathbf{w}|_s = 0$

- Зная заданные значения \mathbf{W}_s и p_s , находим нормальное напряжение на границе раздела жидкой и твердой части S :

$$(\alpha_\lambda \mathbf{D}(\mathbf{w}_s) - p_s \mathbf{l}) \mathbf{n} = \mathbf{A}, \quad (22)$$

где $\mathbf{D}(\mathbf{w})$ – симметричная часть матрицы $\nabla \mathbf{w}$, \mathbf{l} – единичная матрица, \mathbf{n} – единичный вектор нормали к границе S , $\alpha_\lambda = \frac{2\lambda}{Lg\rho_s}$, L – характерный размер рассматриваемой области, λ – коэффициент Ламэ.

- На следующем шаге решалась система уравнений Стокса (19) с граничным условием на S

$$\mathbf{A} = (\alpha_\mu \mathbf{D}(\frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t}) - p_f \mathbf{l}) \mathbf{n} \quad (23)$$

Это граничное условие предполагает, что на общей границе жидкости и упругого скелета вектор перемещения и давления удовлетворяет условию непрерывности нормальных напряжений.

- Найденное значение \mathbf{u} подставляем в уравнение переноса

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho_f = 0,$$

откуда и находится значение плотности для следующего временного шага.

- Так как скорость и давление в жидкой части известно, то в силу условия непрерывности нормальных напряжений определяем \mathbf{W}_s и p_s на следующем временном шаге. Цикл повторяется.

Учитывая поведение жидкости на границе с упругим скелетом и, решая систему уравнений (18)–(20), получим результат, из которого видно изменение положения двух жидкостей относительно друг друга.

При расчете движения жидкостей в порах использовались разностные схемы, описанные выше. Принцип построения разностной схемы для метода частиц в ячейках для уравнения Ламэ имеет ту же структуру, что и для системы уравнений Стокса.

Особого внимания заслуживает конечно-разностная аппроксимация граничных условий на поверхности «жидкость – упругий скелет», так как они существенно отличаются от рассмотренных ранее.

В результате численного моделирования этой модельной задачи получили картину, совершенно отличающуюся от случая "абсолютно твердый скелет".

Сравнивая их визуально, при усреднении, то есть при увеличении количества капилляров четкой границы раздела двух жидкостей не наблюдается. При этом становится различимой переходная фаза, которую можно легко заметить на рисунках, приведенных ниже. Если же

учитывать упругие свойства твердого скелета, то перемещение более тяжелой жидкости вниз происходит при наличии свободной поверхности.

При расчетах обеих задач начальные значения брались одинаковые для оценки скорости протекания процесса фильтрации:

$$\rho_f^+ = 1000, \rho_f^- = 500, \mu = 1, \tau = 0.02, g = 9.81, L = 100, \rho_s = 2000, \lambda = 0.5$$

Расчеты для одного капилляра размера ℓ проводились в области масштаба 1×200 . Для фиксированного $\varepsilon > 0$ (ℓ – характерный размер поры) доказано, что существует единственное решение задачи, в которой граница раздела двух жидкостей есть липшицева поверхность [15].

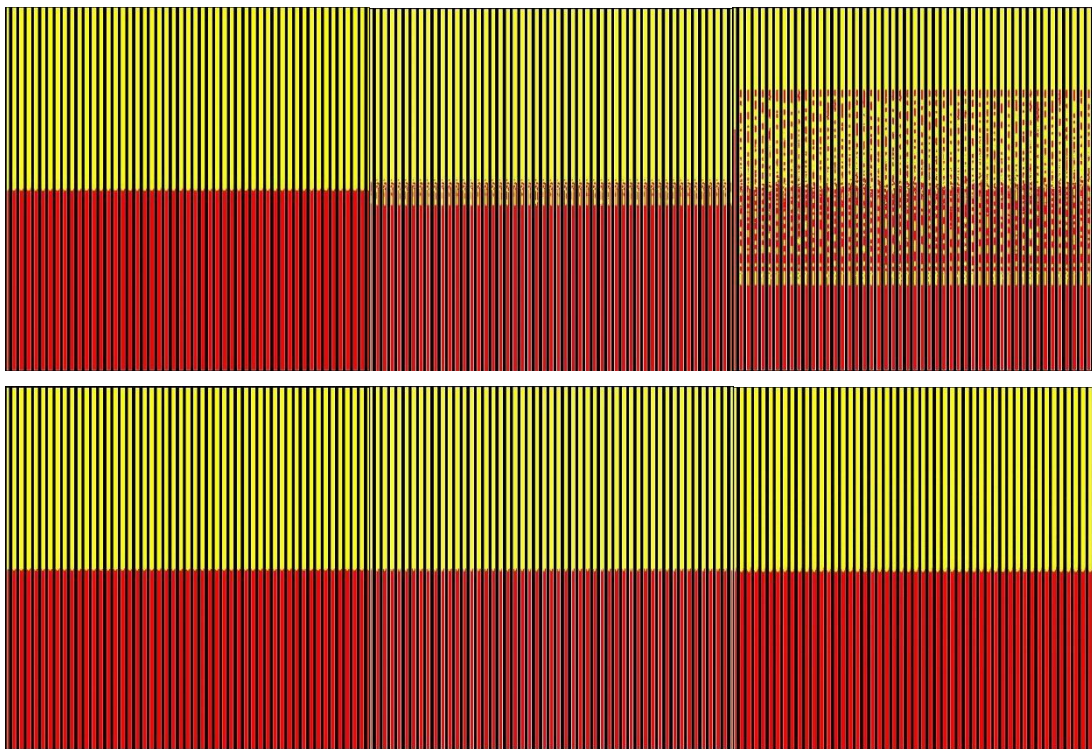


Рис.4. Сравнение результатов случая абсолютно твердого и упругого скелета в момент времени $t = 10, t = 110, t = 750$, слева – абсолютно твердый скелет, справа – упругий скелет.

Для случая, в котором учитывается перемещение твердого скелета также характерно условие, что важно везде соблюдать условие $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ (за исключением поверхности раздела), иначе возникнут возмущения, которые могут исказить картину развития неустойчивости Рэлея-Тейлора.

Также анализ поведения жидкостей при перемешивании проводился на геометрии в виде прямоугольной области Ω , заполненной неподвижными квадратами Ω_s – твердый скелет и жидкостью Ω_f .

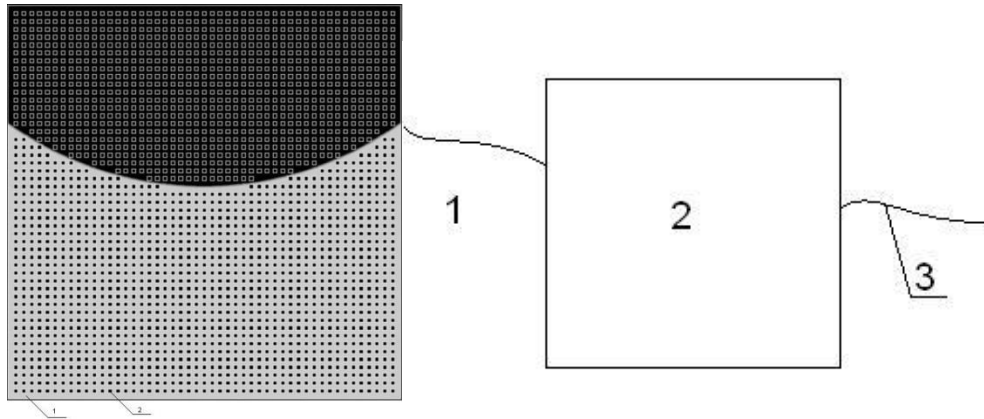


Рис. 5. 1 – Область занятая жидкостью (Ω_f), 2 – твердый скелет (Ω_s),
3 – граница раздела верхней и нижней жидкостей (Γ)

Для указанной геометрии расчетной области автором рассматривалось два случая взаимодействия жидкости и твердого скелета (по аналогии с уже рассмотренной геометрии в виде изолированных капилляров):

- Абсолютно твердый скелет.
- Упругий скелет.

Существует много работ, посвященных как симметричному обтеканию твердых тел, так и несимметричными течениями. Например симметричное обтекание кругового цилиндра описано в [13]. Как известно, при вязком обтекании даже симметричных тел симметрия течения часто нарушается, а в нашем случае оно изначально несимметрично в виду заданной геометрии раздела жидкостей.

В работах Гуцина В.А. и Белоцерковского С.О. была проведена огромная работа в этом направлении для задач обтекания конечных тел вязкой жидкостью, что позволило выявить основные эффекты явления и оценить влияние краевых условий.

На рис.6 приведено векторное поле скоростей в зоне огибания элемента твердого скелета.

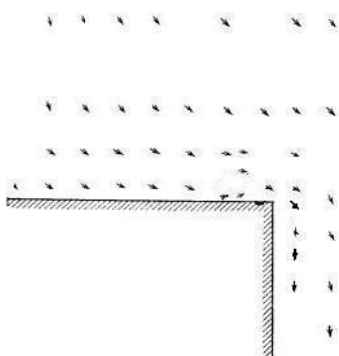


Рис.6. Поле скоростей в зоне огибания тела.

Можно хорошо видеть, что при большом времени процесса завихрений в области предположительного срыва потока не наблюдается.

При решении поставленной задачи был использован метод расщепления. Разностная схема аналогична той, которая использовалась в случае с геометрией в виде изолированных капилляров. Огромное влияние на форму раздела двух жидкостей влияют граничные условия. Оставив те же граничные условия, что и в предыдущих случаях, на рисунке легко увидеть развитие срывных течений, которые приводят к "рассыпанию" более тяжелой жидкости. При этом Физические свойства жидкостей

выбирались такие же, как и в случае геометрии в виде изолированных капилляров.

Картина развития неустойчивости Рэля-Тейлора меняется кардинально, если применить упомянутый выше алгоритм решения задачи с учетом упругих свойств скелета. При перемешивании жидкостей свободная граница раздела двух фаз сохраняется.

В ходе численного моделирования было выявлено, что:

При фиксированном значении коэффициента упругости λ (для твердой компоненты) и при разности плотностей жидкостей ($\delta = \rho^+ / \rho^-$) происходит очень медленное перемешивания двух фаз.

- При $\delta \rightarrow \infty$ скорость фильтрации увеличивается.
- При фиксированном δ и при изменении значения λ видно, что при $\lambda \rightarrow \infty$ (т.е. $\lambda > 1 \cdot 10^4$) процесс перемешивания протекает более медленно.

Таким образом, основываясь на первых двух фактах, чем меньше δ (при фиксированном λ), тем ниже скорость процесса перемешивания. А третье утверждение говорит о том, что чем тверже скелет, тем медленнее протекает процесс перемешивания.

На рис.7 приведено сравнение двух случаев развития рэлей-тейлоровской неустойчивости для данной геометрии.

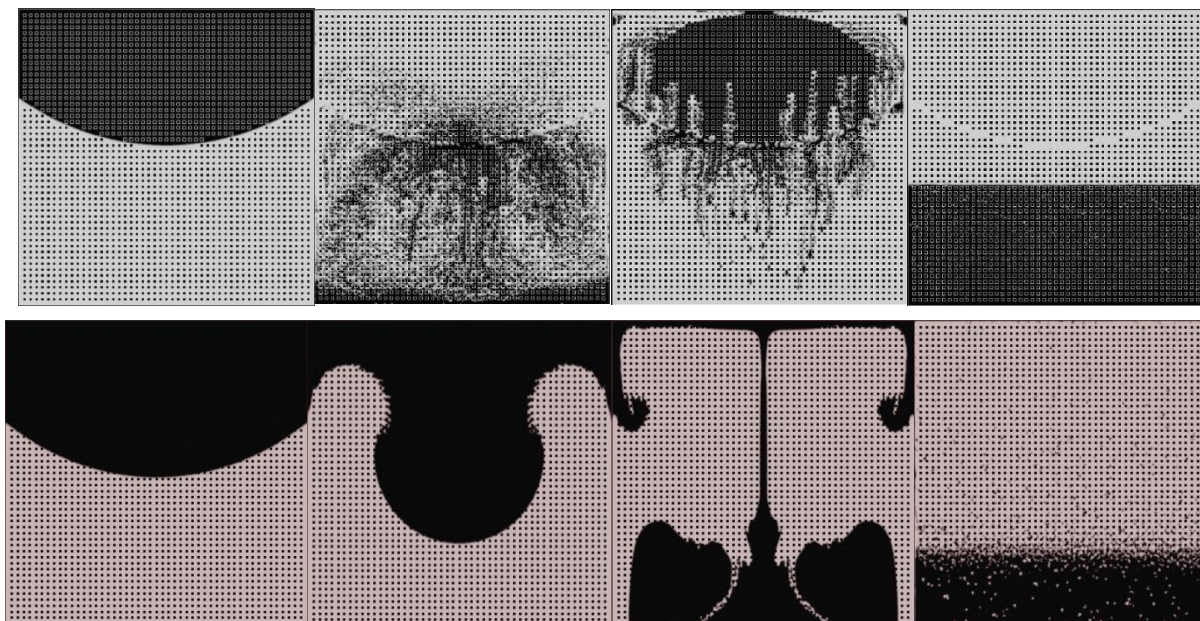


Рис.7. Сравнение результатов случая абсолютно твердого и упругого скелета в момент времени, сверху – абсолютно твердый скелет, снизу – упругий скелет.

Список литературы

1. Биркгоф Г. Неустойчивость Гельмгольца и Тейлора. – В кн.: Гидродинамическая неустойчивость. М.: Мир, 1964, с. 68–94.
2. Inogamov N.A., Turbulent phase of the Rayleigh-Taylor instability. – Черногловка: Институт теоретич. физ. им.
3. Lord Rayleigh, Theory of sound. – N.Y.: Dover Publications Inc., 1984. V.2
4. Taylor G., The instability of liquid surface when accelerated in a direction perpendicular to their plans. I. – Proc. Roy. Soc., 1950, 201, Ser. A, №1065, p. 192–196
5. Lewis D.G., The instability of liquid surface when accelerated in a direction perpendicular to their plans. II. – Proc. Roy. Soc., 1950, 202, Ser. A, №1068, p. 81–96
6. Birkhoff G., Los Alamos Scientific Lab., Rept. №LA-1982. Los Alamos, 1955

7. Ферми Э. Научные труды. – М.: Наука, 1972. Т.2
8. Беленьких С.З., Фрадкин Е.С. Теория турбулентного перемешивания. – Тр. ФИАН СССР, 1965, 29, с. 207–238.
9. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 520 с.
10. Владимирова Н.Н., Кузнецова Б.Г., Яненко Н.Н. Численные расчеты симметричного обтекания пластинки плоским потоком вязкой несжимаемой жидкости. – В кн.: Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск: Наука, 1996, с. 186–192.
11. Daly B.J., Numerical study of two fluid Rayleigh-Taylor instability. – Phys. Fluids, 1967, 10, №2, p.297–307.
12. Burrige R. and Keller J.B., Poroelasticity equations derived from microstructure, – Journal of Acoustic Society of America 70, No. 4, (1981) 1140-1146.
13. Гуцин В.А., Щенников В.В., Об одном численном методе решения уравнений Навье – Стокса. – ЖВМ и МФ, 1974, 14, №2, с. 512 – 520.
14. Antontsev S., Meirmanov A., Yurinsky B. V., A Free Boundary Problem for Stokes Equations: Classical Solutions. Interfaces and Free Boundaries 2, (2000), 413-424
15. Гальцев О.В., Неустойчивость Рэлея-Тейлора в задаче Маскета со свободной границей. – Научные ведомости БелГУ, 2012, №5, с. 70 – 87.

References

1. Birkhoff G. Neustoychivost Helmholtz Teylora. – Proc.: Hydrodynamic instability. М.: Mir, 1964, p. 68-94.
2. Inogamov N.A., Turbulent phase of the Rayleigh-Taylor instability. – Черногловка: Институт теоретич. физ. им.
3. Lord Rayleigh, Theory of sound. – N.Y.: Dover Publications Inc., 1984. V.2
4. Taylor G., The instability of liquid surface when accelerated in a direction perpendicular to their plans. I. – Proc. Roy. Soc., 1950, 201, Ser. A, №1065, p. 192–196
5. Lewis D.G., The instability of liquid surface when accelerated in a direction perpendicular to their plans. II. – Proc. Roy. Soc., 1950, 202, Ser. A, №1068, p. 81–96
6. Birkhoff G., Los Alamos Scientific Lab., Rept. №LA-1982. Los Alamos, 1955
7. Fermi E. Nauchnye trudy. – М.: Science, 1972. Vol.2
8. SZ Belenky, Fradkin E.S. Teoriya turbulent mixing. – Tr. FIAN, 1965, 29, pp. 207-238.
9. Belotserkovskii O.M. Chislennoe modeling in continuum mechanics sred. – М.: Nauka. Glavnaya revision of physical and mathematical literature, p. 1984.-520
10. Vladimirov NN Kuznetsov, BL, Yanenka NN Numerical calculations of symmetrical flat plate flow of a viscous incompressible fluid. – In the book.: Some problems of computational and applied mathematics. Nauka, Novosibirsk, 1996, p. 186-192.
11. Daly B.J., Numerical study of two fluid Rayleigh-Taylor instability. – Phys. Fluids, 1967, 10, №2, p.297–307.
12. Burrige R. and Keller J.B., Poroelasticity equations derived from microstructure, – Journal of Acoustic Society of America 70, No. 4, (1981) 1140-1146.
13. VA Gushchin, Shennikov VV, On a numerical method for solving the Navier – Stokes equations. – Zh, 1974, 14, №2, p. 512 – 520.
14. Antontsev S., Meirmanov A., Yurinsky B. V., A Free Boundary Problem for Stokes Equations: Classical Solutions. Interfaces and Free Boundaries 2, (2000), 413-424
15. Maltsev, OV, Rayleigh-Taylor instability in Muskat problem with a free boundary. – Scientific statements BSU, 2012, №5, p. 70 – 87.



УДК 519.7

О ШИФРАХ, НЕ РАСПРОСТРАНЯЮЩИХ ИСКАЖЕНИЙ ON CIPHERS, NOT SPREADING DISTORTIONS

**Рацеев С.М., Рацеев В.М.
Ratseev S.M., Ratseev V.M.**

Ульяновский государственный университет, 432017, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42.
Ulyanovsk State University, 432017, Ulyanovsk, Lev Tolstoy 42
E-mail: ratseevsm@mail.ru

E-mail: galtsev_o@bsu.edu.ru; galtseva@bsu.edu.ru

*Ключевые слова: шифр, модель шифра, искажение сообщения.
Key words: cipher, cipher model, distortion of the message.*

*Аннотация. В работе приводится систематическое изложение материала по описанию эндоморфных шифров, не распространяющих искажений. Данная работа основана на работах [1] и [2].
Resume. The paper provides systematic presentation of the material according to the description of the ciphers, not distributing distortions. This work is based on the works [1] and [2].*

Введение

Следуя работе [1], введем алгебраическую модель шифра. Пусть X , K , Y — некоторые (не обязательно конечные) множества возможных открытых текстов, ключей и зашифрованных текстов соответственно. Пусть также $E_k : X \rightarrow Y$ — правило зашифрования на ключе $k \in K$. Обозначим через E множество правил зашифрования $\{E_k | k \in K\}$, а через $E_k(X)$ — образ множества X при отображении $E_k : X \rightarrow Y$, т.е. $E_k(X) = \{E_k(x) | x \in X\}$. Пусть $D_k : E_k(X) \rightarrow X$ — правило расшифрования на ключе $k \in K$. Обозначим через D множество правил расшифрования $\{D_k | k \in K\}$.

Определение 1. Шифром (шифросистемой) называется совокупность

$$\Sigma_A = (X, K, Y, E, D),$$

для которой выполнены следующие свойства:

- 1) для любых $x \in X$ и $k \in K$ выполнено равенство $D_k(E_k(x)) = x$;
- 2) $Y = \bigcup_{k \in K} E_k(X)$.

В обзорной работе [3] рассматриваются задачи построения совершенных шифров по заданному набору параметров, приводятся необходимые и достаточные условия данных шифров, рассматриваются совершенные шифры замены с неограниченным ключом, а также совершенные шифры, стойкие к имитации и подмене зашифрованных сообщений с необязательно равномерным распределением на множестве ключей.

Передаваемое по каналу связи зашифрованное сообщение может подвергнуться как целенаправленным искажениям злоумышленников, так и искажениям, причиной которых могут являться помехи в самом канале связи. Искажения могут привести к потере части или даже всего открытого текста, так как расшифрование искаженного зашифрованного текста может привести к непредсказуемым результатам. Нас будут интересовать шифры, которые не распространяют искажения при расшифровании. Ограничимся рассмотрением эндоморфных шифров и таких

искажений, которые заменяют символы алфавита символами того же алфавита, либо приводят к потере или появлению дополнительных символов алфавита.

Пусть A — некоторый конечный алфавит. На протяжении всей работы считается, что $X = Y = \bigcup_{l=1}^{\infty} A^l$.

Шифры, не распространяющие искажений типа замены знаков

Рассмотрим шифры, которые не изменяют длины сообщения при шифровании, т.е. такие шифры $\Sigma_A = (X, K, Y, E, D)$, что для любого $l \in \mathbb{N}$, любого $x \in A^l$ и любого $k \in K$ следует, что $E_k(x) \in A^l$. Поэтому $E_k(A^l) \subseteq A^l$ для любого $l \in \mathbb{N}$ и $k \in K$.

Так как все правила зашифрования E_k являются инъективными отображениями множества X в Y , то, с учетом того, что $X = Y$, все E_k будут являться также биективными преобразованиями множества X . В частности, $E_k(A^l) = A^l$ для любого $l \in \mathbb{N}$ и $k \in K$.

В A^l для любого $l \in \mathbb{N}$ введем метрику Хэмминга, определенную следующей формулой:

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^l \delta(x_i, y_i),$$

где $x = x_1 \dots x_l, y = y_1 \dots y_l \in A^l$, причем

$$\delta(x_i, y_i) = \begin{cases} 1, & x_i \neq y_i, \\ 0, & x_i = y_i. \end{cases}$$

Пусть $r > 0$ и $x \in A^l$. Определим шар радиуса r с центром в x как множество

$$S_r(x) = \{y \in A^l \mid \rho(x, y) \leq r\}.$$

Определение 2. Говорят, что шифр Σ_A не распространяет искажений типа замены знаков, если для любого $l \in \mathbb{N}$, любых $x, y \in A^l$ и $k \in K$ выполнено неравенство

$$\rho(D_k(x), D_k(y)) \leq \rho(x, y).$$

Лемма 1. Для эндоморфного шифра Σ_A , не изменяющего длины сообщений, следующие условия эквивалентны.

- (i) Шифр Σ_A не распространяет искажений типа замены знаков.
- (ii) Для любого $l \in \mathbb{N}$, любых $x, y \in A^l$ и $k \in K$ выполнено равенство

$$\rho(D_k(x), D_k(y)) = \rho(x, y). \tag{1}$$

- (iii) Для любого $l \in \mathbb{N}$, любых $x, y \in A^l$ и $k \in K$ выполнено равенство

$$\rho(E_k(x), E_k(y)) = \rho(x, y).$$

Доказательство. Очевидно, что если выполняется равенство (1), то шифр Σ_A не распространяет искажений типа замены знаков, поэтому из (ii) следует (i).

Докажем в обратную сторону. Зафиксируем некоторое $l \in \mathbb{N}$ и некоторый элемент $k \in K$. Рассмотрим следующее преобразование f множества $A^l \times A^l$:

$$f(x, y) = (D_k(x), D_k(y)), \quad (x, y) \in A^l \times A^l.$$



Так как D_k является биективным преобразованием множества A^l , то преобразование f множества $A^l \times A^l$ также является биективным. Поэтому если (x, y) пробегает все множество $A^l \times A^l$, то $(D_k(x), D_k(y))$ также пробегает все множество $A^l \times A^l$. Следовательно,

$$\sum_{(x,y) \in A^l \times A^l} \rho(D_k(x), D_k(y)) = \sum_{(x,y) \in A^l \times A^l} \rho(x, y).$$

Из данного равенства следует, что

$$\sum_{(x,y) \in A^l \times A^l} [\rho(x, y) - \rho(D_k(x), D_k(y))] = 0.$$

Так как все слагаемые последней суммы неотрицательны и вся сумма равна 0, то это возможно лишь в том случае, когда выполнено условие (1). Следовательно, условие (i) влечет условие (ii).

Пусть выполнено условие (ii). Тогда

$$\rho(E_k(x), E_k(y)) = \rho(D_k(E_k(x)), D_k(E_k(y))) = \rho(x, y).$$

Таким образом, из (ii) следует (iii).

Обратно, пусть выполнено условие (iii). Тогда

$$\rho(D_k(x), D_k(y)) = \rho(E_k(D_k(x)), E_k(D_k(y))) = \rho(x, y).$$

Поэтому условие (iii) влечет условие (ii). Лемма доказана.

Отображение $f: A^l \rightarrow A^l$ называется *изометрией*, если для любых $x, y \in A^l$ выполнено равенство

$$\rho(f(x), f(y)) = \rho(x, y).$$

Заметим, что из определения изометрии следует, что f является биективным преобразованием множества A^l .

Лемма 1 показывает, что если эндоморфный шифр Σ_A не распространяет искажений типа замены знаков, то множество правил зашифрования E состоит из изометрий.

Зафиксируем произвольным образом элемент $\bar{a} = a_1 \dots a_l \in A^l$. Обозначим

$$S_1^i(\bar{a}) = \{a_1 \dots a_{i-1} a a_{i+1} \dots a_l \mid a \in A\}.$$

Заметим, что

$$\bigcup_{i=1}^l S_1^i(\bar{a}) = S_1(\bar{a}), \quad \bigcap_{i=1}^l S_1^i(\bar{a}) = \begin{cases} A, & l=1, \\ \{\bar{a}\}, & l>1. \end{cases} \quad (2)$$

Лемма 2. Пусть $f: A^l \rightarrow A^l$ — изометрия и $\bar{a} = a_1 \dots a_l$ — некоторый элемент из A^l . Тогда будут выполнены следующие условия.

1. Для любого $r \geq 1$ справедливо равенство

$$f(S_r(\bar{a})) = S_r(f(\bar{a})). \quad (3)$$

2. Для любого $i = 1, 2, \dots, l$ найдется такое j , $1 \leq j \leq l$, зависящее от значения i , что будет выполнено равенство

$$f(S_i^j(\bar{a})) = S_i^j(f(\bar{a})). \quad (4)$$



Доказательство. 1. Пусть $r \geq 1$ — некоторое число. Покажем, что выполнено включение $f(S_r(\bar{a})) \subseteq S_r(f(\bar{a}))$. Пусть $\bar{y} \in f(S_r(\bar{a}))$. Тогда найдется такой элемент $\bar{x} \in S_r(\bar{a})$, что $f(\bar{x}) = \bar{y}$. При этом

$$\rho(f(\bar{a}), \bar{y}) = \rho(f(\bar{a}), f(\bar{x})) = \rho(\bar{a}, \bar{x}) \leq r.$$

Следовательно, $\bar{y} \in S_r(f(\bar{a}))$, что показывает включение $f(S_r(\bar{a})) \subseteq S_r(f(\bar{a}))$. Поскольку

$$|S_r(\bar{a})| = |f(S_r(\bar{a}))| = |S_r(f(\bar{a}))|,$$

то выполнено равенство (3).

2. Чтобы доказать равенство (4), достаточно показать, что выполнено вложение

$$f(S_1^i(\bar{a})) \subseteq S_1^i(f(\bar{a})),$$

так как $|f(S_1^i(\bar{a}))| = |S_1^i(f(\bar{a}))|$ для любых $1 \leq i, j \leq l$.

Предположим противное. Пусть существует такое i_0 , что для любого $j = 1, 2, \dots, l$

$$\begin{array}{ccc} f(S_1^{i_0}(\bar{a})) & & S_1^j(f(\bar{a})) \\ & \text{не содержится в} & \end{array}.$$

Заметим, что из (2) и пункта 1 данной леммы следует, что

$$f\left(\bigcup_{i=1}^l S_1^i(\bar{a})\right) = \bigcup_{j=1}^l S_1^j(f(\bar{a})).$$

Поэтому найдутся такие $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in S_1^{i_0}(\bar{a})$, причем $\bar{x}_1 \neq \bar{a}$ и $\bar{x}_2 \neq \bar{a}$, и такие $j_1 < j_2$, что $\bar{y}_1 = f(\bar{x}_1) \in S_1^{j_1}(f(\bar{a}))$ и $\bar{y}_2 = f(\bar{x}_2) \in S_1^{j_2}(f(\bar{a}))$.

Пусть $f(\bar{a}) = c_1 \dots c_l$. Тогда

$$\bar{y}_1 = c_1 \dots c_{j_1-1} d c_{j_1} \dots c_{j_2-1} c_{j_2} c_{j_2+1} \dots c_l,$$

$$\bar{y}_2 = c_1 \dots c_{j_1-1} c_{j_1} c_{j_1+1} \dots c_{j_2-1} e c_{j_2} c_{j_2+1} \dots c_l,$$

причем $d \neq c_{j_1}$ и $e \neq c_{j_2}$. Поэтому $\rho(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = 2$. Но

$$\rho(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = \rho(f(\bar{x}_1), f(\bar{x}_2)) = \rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 1.$$

Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $f, g: A^l \rightarrow A^l$ — изометрии. Тогда

(i) если для некоторого $\bar{a} \in A^l$ выполнено равенство $f|_{S_1(\bar{a})} = id|_{S_1(\bar{a})}$, где id — тождественное отображение, то $f = id$ на всем множестве A^l ;

(ii) если для некоторого $\bar{a} \in A^l$ выполнено равенство $f|_{S_1(\bar{a})} = g|_{S_1(\bar{a})}$, то $f = g$ на всем множестве A^l . **Доказательство.** (i) Рассмотрим последовательность шаров:

$$S_1(\bar{a}) \subseteq S_2(\bar{a}) \subseteq \dots \subseteq S_n(\bar{a}) \subseteq \dots$$

Заметим, что данная последовательность является стабилизирующей, так как для любого $n \geq l$ выполняется равенство $S_n(\bar{a}) = A^l$. С помощью индукции покажем, что для любого $n \geq 1$ сужение отображения f на множество $S_n(\bar{a})$ равно тождественной функции на множестве $S_n(\bar{a})$:



$$f|_{S_n(\bar{a})} = id|_{S_n(\bar{a})},$$

Из условия (i) леммы база индукции при $n=1$ выполняется.

Предположим, что сужение отображения f на множество $S_k(\bar{a})$ для любого $k < n$ является тождественным отображением. Покажем, что $f|_{S_n(\bar{a})} = id|_{S_n(\bar{a})}$, т.е. для любого $\bar{b} \in S_n(\bar{a})$ выполнено равенство $f(\bar{b}) = \bar{b}$. Не ограничивая общность, рассмотрим в качестве \bar{b} такой элемент:

$$\bar{b} = b_1 b_2 \dots b_n a_{n+1} \dots a_l.$$

Если $\rho(\bar{a}, \bar{b}) < n$, тогда по предположению индукции выполнено равенство $f(\bar{b}) = \bar{b}$. Поэтому рассмотрим случай $\rho(\bar{a}, \bar{b}) = n$, который означает, что $a_1 \neq b_1, a_2 \neq b_2, \dots, a_n \neq b_n$. Введем в рассмотрение следующие элементы шара $S_{n-1}(\bar{a})$:

$$\bar{b}_1 = a_1 b_2 \dots b_n a_{n+1} \dots a_l,$$

$$\bar{b}_2 = b_1 a_2 \dots b_n a_{n+1} \dots a_l,$$

$$\bar{b}_n = b_1 b_2 \dots a_n a_{n+1} \dots a_l.$$

По предположению индукции $f(\bar{b}_i) = \bar{b}_i$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$. Поэтому

$$\rho(f(\bar{b}), \bar{b}_i) = \rho(f(\bar{b}), f(\bar{b}_i)) = \rho(\bar{b}, \bar{b}_i) = 1.$$

Следовательно,

$$f(\bar{b}) \in \bigcap_{i=1}^n S_1(\bar{b}_i).$$

При этом

$$\bigcap_{i=1}^n S_1(\bar{b}_i) = \begin{cases} \{\bar{a}, \bar{b}\}, & n = 2, \\ \{\bar{b}\}, & n > 2. \end{cases}$$

Так как f является биективным преобразованием множества A^l и $f(\bar{a}) = \bar{a}$, то $f(\bar{b}) = \bar{b}$.

(ii) Пусть для некоторого $\bar{a} \in A^l$ выполнено равенство $f|_{S_1(\bar{a})} = g|_{S_1(\bar{a})}$.

Так как f и g биективные преобразования множества A^l , являющиеся изометриями, то преобразование $f \circ g^{-1}$ также будет являться биективным преобразованием множества A^l и изометрией, причем

$$(f \circ g^{-1})|_{S_1(\bar{a})} = id|_{S_1(\bar{a})}.$$

Поэтому из пункта (i) будет следовать, что

$$f \circ g^{-1} = id$$

на всем множестве A^l . Следовательно, $f = g$ на множестве A^l . Лемма доказана.

Пусть $l \in \mathbb{N}$. Определим на множестве A^l такие преобразования:

$$\Pi_{j_1 \dots j_l}(a_1 \dots a_l) = a_{j_1} \dots a_{j_l},$$

$$R(a_1 \dots a_l) = R_1(a_1) \dots R_l(a_l),$$

где R_1, \dots, R_l — некоторые подстановки множества A , $\Pi_{j_1 \dots j_l}$ — некоторая перестановка:

$$\Pi_{j_1 \dots j_l} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & l \\ j_1 & j_2 & \dots & j_l \end{pmatrix}$$

Теорема 1 (Марков А.А.). *Отображение $E_k \in E$ является изометрией тогда и только тогда, когда для любого $l \in \mathbb{N}$*

$$E_k \big|_{A^l} = R \circ \Pi_{j_1 \dots j_l}$$

для подходящих R и $\Pi_{j_1 \dots j_l}$, где $E_k \big|_{A^l}$ — сужение отображения E_k на множество A^l .

Доказательство. Так как преобразования R и $\Pi_{j_1 \dots j_l}$ являются изометриями, а композиция изометрий также является изометрией, то достаточность условия теоремы очевидна.

Докажем в обратную сторону. Зафиксируем произвольное значение $l \in \mathbb{N}$ и некоторый элемент $\bar{a} = a_1 \dots a_l \in A^l$. Пусть $E_k(a_1 \dots a_l) = c_1 \dots c_l$. Из второго пункта леммы 2 следует, что для любого $i = 1, 2, \dots, l$ найдется такое $j = j(i)$, что

$$E_k : \{a_1 \dots a_{i-1} a a_{i+1} \dots a_l \mid a \in A\} \rightarrow \{c_1 \dots c_{j-1} a c_{j+1} \dots c_l \mid a \in A\}.$$

Поэтому

$$E_k(a_1 \dots a_{i-1} a a_{i+1} \dots a_l) = c_1 \dots c_{j-1} R_{j_i}(a) c_{j+1} \dots c_l, \tag{5}$$

где R_{j_i} — некоторая подстановка множества A . Следовательно, сужение отображения E_k на множество $S_1(\bar{a})$ представимо в виде композиции преобразований R и $\Pi_{j_1 \dots j_l}$:

$$E_k \big|_{S_1(\bar{a})} = (R \circ \Pi_{j_1 \dots j_l}) \big|_{S_1(\bar{a})},$$

где R_1, \dots, R_l — преобразования, полученные в формуле (5). Так как композиция изометрий R и $\Pi_{j_1 \dots j_l}$ также является изометрией, то из последнего равенства в силу леммы 3 следует такое равенство:

$$E_k \big|_{A^l} = R \circ \Pi_{j_1 \dots j_l}.$$

Теорема доказана.

Из теоремы А.А. Маркова следует, что в классе эндоморфных шифров, не изменяющих длины сообщений, не распространяют искажений типа замены знаков, например, шифры перестановки, поточные шифры однозначной замены, а так же композиции шифров перестановки и замены.



Шифры, не распространяющие искажений типа пропуска знаков

Данный параграф написан на основе работы [2]. Здесь рассматриваются эндоморфные шифры и такие искажения, которые приводят к потере символов алфавита.

Введем на множестве $X=Y$ бинарное отношение ε следующим образом. Пусть $x, y \in X$. $x\varepsilon y \Leftrightarrow$ слово y получено из x путем удаления одного вхождения некоторой его буквы. Определим множество $\varepsilon(x)$ для некоторого $x \in X$ следующим образом:

$$\varepsilon(x) = \{y \in X \mid x\varepsilon y\}.$$

Например, если $x = x_1x_2x_3$, то $\varepsilon(x) = \{x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3\}$.

Через ε^n будем понимать степень отношения ε : $x\varepsilon^n y$, где значение n меньше длины слова x , тогда и только тогда, когда слово y получено из x путем удаления n вхождений некоторых его букв. Можно также дать и эквивалентное определение для ε^n : $x\varepsilon^n y$, где значение n меньше длины слова x , тогда и только тогда, когда найдутся такие $z_1, z_2, \dots, z_{n-1} \in X$, что

$$x \varepsilon z_1 \varepsilon z_2 \varepsilon \dots \varepsilon z_{n-1} \varepsilon y.$$

Заметим, что $x\varepsilon^0 y \Leftrightarrow x = y$.

Определение 3. Будем говорить, что шифр Σ_A не распространяет искажений типа пропуска знаков, если для любых $x, y \in Y$, любого $k \in K$ и любого натурального n , меньшего длины слова x , найдется такое число $0 \leq m \leq n$, что из условия $x\varepsilon^n y$ следует $D_k(x)\varepsilon^m D_k(y)$.

Лемма 4. Если в определении 3 число $n > 0$, то из этого всегда будет следовать, что число m также больше нуля.

Доказательство. Пусть для некоторых $x, y \in Y$ из условия $x\varepsilon^n y$ следует $D_k(x)\varepsilon^0 D_k(y)$, где n — некоторое положительное число, меньшее длины слова x , и k — некоторый элемент множества K . Так как $x\varepsilon^n y$, то $x \neq y$, а из условия $D_k(x)\varepsilon^0 D_k(y)$ следует, что $D_k(x) = D_k(y)$, что противоречит инъективности отображения D_k . Лемма доказана.

Лемма 5. Если эндоморфный шифр Σ_A не распространяет искажений типа пропуска знаков, то он не изменяет длины сообщений при шифровании.

Доказательство. Пусть выполнено условие леммы для некоторого шифра Σ_A . Покажем, что для любого $k \in K$ и любого $l \in \mathbb{N}$ выполнено включение $E_k(A^l) \subseteq A^l$.

Фиксируем произвольное $k \in K$. Рассмотрим сначала случай $l = 1$. Предположим, что $E_k(A)$ не содержится в A , то есть найдется такое $a \in A$, что $E_k(a) = b_1 \dots b_t \in A^t$, где $t > 1$. Так как $b_1 \dots b_t \varepsilon b_1 \dots b_{t-1}$, то $D_k(b_1 \dots b_t) \varepsilon D_k(b_1 \dots b_{t-1})$. Но $D_k(b_1 \dots b_t) = a \in A$, а длина слова $D_k(b_1 \dots b_{t-1})$ не меньше единицы, поэтому, с учетом леммы 4, пришли к противоречию. Следовательно, $E_k(A) \subseteq A$.



Предположим, что для всех $t < l$, где $l > 1$, выполнено включение $E_k(A^t) \subseteq A^t$ для любого $k \in K$. Покажем, что тогда $E_k(A^l) \subseteq A^l$. Предположим, что это не так для некоторого $k \in K$. Пусть $E_k(A^l)$ не содержится в A^l , т.е. найдется такое $x \in A^l$, что $E_k(x) = b_1 \dots b_s$, причем $s \neq l$. Заметим, что число s не может быть меньше чем l , так как $D_k(A^t) \subseteq A^t$ для всех $t < l$. Поэтому $s > l$. Из отношения $b_1 \dots b_s \varepsilon b_1 \dots b_{s-1}$ должно следовать отношение $D_k(b_1 \dots b_s) \varepsilon D_k(b_1 \dots b_{s-1})$, но длина слова $D_k(b_1 \dots b_s)$ равна l , а длина слова $D_k(b_1 \dots b_{s-1})$ не меньше l , что следует из предположения индукции, так как $s - 1 \geq l$. Поэтому пришли к противоречию. Следовательно $E_k(A^l) \subseteq A^l$. Лемма доказана.

Лемма 6. Для эндоморфного шифра Σ_A следующие условия эквивалентны.

- (i) Шифр Σ_A не распространяет искажений типа пропуска знаков.
- (ii) Для любых $x, y \in Y$, любого $k \in K$ и любого натурального n , меньшего длины слова x , из условия $x \varepsilon^n y$ следует $D_k(x) \varepsilon^n D_k(y)$.
- (iii) Для любых $x, y \in X$, любого $k \in K$ и любого натурального n , меньшего длины слова x , из условия $x \varepsilon^n y$ следует $E_k(x) \varepsilon^n E_k(y)$.

Доказательство. Очевидно, что из условия (ii) следует (i).

Докажем в обратную сторону. Предположим, что выполнено условие (i). Пусть $x, y \in Y$ и $x \varepsilon^n y$, т.е. найдутся такие $z_1, z_2, \dots, z_{n-1} \in Y$, что

$$x \varepsilon z_1 \varepsilon z_2 \varepsilon \dots \varepsilon z_{n-1} \varepsilon y.$$

Тогда, учитывая лемму 4, имеем

$$D_k(x) \varepsilon D_k(z_1) \varepsilon D_k(z_2) \varepsilon \dots \varepsilon D_k(z_{n-1}) \varepsilon D_k(y).$$

Следовательно, $D_k(x) \varepsilon^n D_k(y)$. Поэтому условие (i) влечет условие (ii).

Пусть выполнено условие (ii). Зафиксируем некоторое значение $k \in K$. Пусть $x, y \in X$. Так как шифр Σ_A сохраняет длины сообщений при шифровании (лемма 5), то найдется такое число m , что

$$D_k^m(x) = \underbrace{(D_k \circ \dots \circ D_k)}_m(x) = x, \quad D_k^m(y) = \underbrace{(D_k \circ \dots \circ D_k)}_m(y) = y.$$

Поэтому $E_k(x) = D_k^{m-1}(x)$ и $E_k(y) = D_k^{m-1}(y)$. Так как из отношения $x \varepsilon^n y$ следует $D_k(x) \varepsilon^n D_k(y)$, из которого, в свою очередь, следует $D_k^2(x) \varepsilon^n D_k^2(y)$ и т.д., то

$$E_k(x) = D_k^{m-1}(x) \varepsilon^n D_k^{m-1}(y) = E_k(y).$$

Таким образом, из условия (ii) следует (iii).

Аналогичным образом доказывается, что условие (iii) влечет условие (ii). Лемма доказана.

Лемма 7. Пусть эндоморфный шифр Σ_A не распространяет искажений типа пропуска знаков. Тогда для любого $x \in X$ и любого $k \in K$ следует равенство

$$E_k(\varepsilon(x)) = \varepsilon(E_k(x)).$$



Доказательство. Зафиксируем $x \in X$ и $k \in K$. Покажем сначала, что

$$E_k(\varepsilon(x)) \subseteq \varepsilon(E_k(x)). \quad (6)$$

Пусть $y \in E_k(\varepsilon(x))$. Тогда найдется такой $x' \in \varepsilon(x)$, что $y = E_k(x')$. Так как $x \varepsilon x'$, то $E_k(x) \varepsilon E_k(x') = y$ (лемма 6). Следовательно, $y \in \varepsilon(E_k(x))$, что доказывает включение (6).

Аналогичным же образом получается, что

$$D_k(\varepsilon(x)) \subseteq \varepsilon(D_k(x)),$$

из которого следует, что

$$D_k(\varepsilon(E_k(x))) \subseteq \varepsilon(D_k(E_k(x))) = \varepsilon(x). \quad (7)$$

Из включения (7) следует такое включение:

$$\varepsilon(E_k(x)) = E_k(D_k(\varepsilon(E_k(x)))) \subseteq E_k(\varepsilon(x)).$$

Лемма доказана.

Лемма 8. Пусть $\bar{x}, \bar{y} \in A^l$ для некоторого $l \geq 3$. Тогда из равенства $\varepsilon(\bar{x}) = \varepsilon(\bar{y})$ будет следовать равенство $\bar{x} = \bar{y}$.

Доказательство. Докажем сначала, что любое слово $\bar{x} \in A^l$, где $l \geq 3$, однозначно определяется множеством $\varepsilon(\bar{x})$.

Пусть a — первый символ слова \bar{x} . Тогда возможны 3 случая:

- 1) $\bar{x} = a^l = \underbrace{a \dots a}_l$,
- 2) $\bar{x} = a^n b \bar{z}$, $n \geq 2$, $b \in A$, $a \neq b$,
- 3) $\bar{x} = ab \bar{z}$, $b \in A$, $a \neq b$.

В первом случае множество $\varepsilon(\bar{x})$ состоит из одного слова a^{l-1} .

Во втором случае все слова из $\varepsilon(\bar{x})$ начинаются с буквы a , причем одно из них есть $a^{n-1} b \bar{z}$, а все другие имеют начало a^n .

В третьем случае $\varepsilon(\bar{x})$ содержит слова $a \bar{z}$ и $b \bar{z}$, а все остальные слова (если они есть, т.е. $\bar{z} \neq b^{l-2}$) имеют начало ab .

Поэтому алгоритм восстановления слова \bar{x} по множеству $\varepsilon(\bar{x})$ будет следующим.

1. Если $\varepsilon(\bar{x}) = \{a^{l-1}\}$, то $\bar{x} = a^l$.
2. Если все слова из $\varepsilon(\bar{x})$ начинаются на одну и ту же букву, например, a , то одним из них является $a^{n-1} b \bar{z}$, а все остальные имеют вид $a^n \bar{z}_i$. Тогда $\bar{x} = a^n b \bar{z}$.

3. Пусть все слова, кроме одного, множества $\varepsilon(\bar{x})$ начинаются на одну и ту же букву.

а) Если $\varepsilon(\bar{x}) = \{a \bar{z}, b \bar{z}\}$, то либо $\bar{z} = a^{l-2}$, либо $\bar{z} = b^{l-2}$. Поэтому если, например, $\bar{z} = b^{l-2}$, то $\bar{x} = ab^{l-1}$.

б) Если же $\varepsilon(\bar{x}) = \{a \bar{z}, b \bar{z}, ab \bar{z}_1, \dots, ab \bar{z}_m\}$, то из множества $\varepsilon(\bar{x})$ возьмем единственное слово, не начинающееся на букву a , то есть $b \bar{z}$, и добавим к нему в начало букву a , получаем $\bar{x} = ab \bar{z}$.

Таким образом, если $\varepsilon(\bar{x}) = \varepsilon(\bar{y})$ для некоторых $\bar{x}, \bar{y} \in A^l$, где $l \geq 3$, то $\bar{x} = \bar{y}$. Лемма доказана.

Обозначим через σ такое биективное преобразование множества X , для которого выполнено свойство $\sigma(x_1 \dots x_l) = \sigma(x_1) \dots \sigma(x_l)$ для любого $x = x_1 \dots x_l \in X$. Таким образом, преобразование σ достаточно задать на множестве A . Обозначим также через μ оператор обращения слов, т.е. если $x = x_1 \dots x_l$, то $\mu(x) = x_l \dots x_1$.

Теорема 2 (Бабаш А.В., Глухов М.М., Шанкин Г.П.). Пусть $X = Y = \bigcup_{l=1}^L A^l$. Эндоморфный шифр Σ_A не распространяет искажений типа пропуска знаков тогда и только тогда, когда для любого $k \in K$ выполнены следующие условия:

1. Если $L = 2$, то для любого $x \in X$ либо

$$E_k(x) = \sigma(x),$$

либо

$$E_k(x) = \sigma(\mu(x)),$$

где $\sigma = E_k|_A$ — сужение отображения E_k на множество A ;

2. Если $L > 2$, то либо

$$E_k = \sigma \text{ на всем множестве } X,$$

либо

$$E_k = \sigma \circ \mu \text{ на всем множестве } X,$$

где $\sigma = E_k|_A$ — сужение отображения E_k на множество A .

Доказательство. Очевидно, что отображения σ и μ не распространяют искажений типа пропуска знаков, поэтому достаточность условия теоремы очевидна.

Докажем в обратную сторону. Зафиксируем $k \in K$.

1. Пусть $L = 2$. Так как шифр Σ_A не изменяет длины слов при шифровании (лемма 5), то $E_k(A) = A$. Обозначим через σ — сужение отображения E_k на множество A . Покажем, что для любого $a_1 a_2 \in A^2$ либо $E_k(a_1 a_2) = \sigma(a_1) \sigma(a_2)$, либо $E_k(a_1 a_2) = \sigma(a_2) \sigma(a_1)$.

Пусть $a_1 \neq a_2$ и $E_k(a_1 a_2) = b_1 b_2 \in A^2$. Из леммы 7 следует, что

$$E_k(\varepsilon(a_1 a_2)) = \varepsilon(E_k(a_1 a_2)).$$

Так как

$$E_k(\varepsilon(a_1 a_2)) = E_k(\{a_1, a_2\}) = \{E_k(a_1), E_k(a_2)\} = \{\sigma(a_1), \sigma(a_2)\},$$

$$\varepsilon(E_k(a_1 a_2)) = \varepsilon(b_1 b_2) = \{b_1, b_2\},$$

то либо $\sigma(a_1) = b_1$ и $\sigma(a_2) = b_2$, либо $\sigma(a_1) = b_2$ и $\sigma(a_2) = b_1$.

Пусть $a_1 = a_2 = a$ и $E_k(aa) = b_1 b_2$. Тогда

$$E_k(\varepsilon(aa)) = E_k(\{a\}) = \{\sigma(a)\},$$

$$\varepsilon(E_k(aa)) = \varepsilon(b_1 b_2) = \{b_1, b_2\}.$$



Следовательно, $b_1 = b_2 = \sigma(a)$.

2. Пусть $L > 2$. Из пункта 1 следует, что для любого $a_1 a_2 \in A^2$ либо $E_k(a_1 a_2) = \sigma(a_1) \sigma(a_2)$, либо $E_k(a_1 a_2) = \sigma(a_2) \sigma(a_1)$, где $\sigma = E_k|_A$ — сужение отображения E_k на множество A . Покажем, что в случае $L > 2$ отображение E_k на всем множестве A^2 представимо либо в виде

$$E_k|_{A^2} = \sigma,$$

либо в виде

$$E_k|_{A^2} = \sigma \circ \mu.$$

Рассмотрим такой случай: пусть найдутся такие $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$, что

$$E_k(a_1 a_2) = \sigma(a_1) \sigma(a_2).$$

Покажем, что тогда $E_k|_{A^2} = \sigma$. Для начала докажем, что в этом случае $E_k(a_1 a) = \sigma(a_1) \sigma(a)$ для любого $a \in A$. Предположим, что это не так. Тогда найдется такое $a \in A$, $a \neq a_1$, $a \neq a_2$, что $E_k(a_1 a) = \sigma(a) \sigma(a_1)$. Рассмотрим слово $a_1 a_2 a \in A^3$. Так как

$$\varepsilon(a_1 a_2 a) = \{a_1 a_2, a_1 a, a_2 a\},$$

то

$$E_k(\varepsilon(a_1 a_2 a)) = \{\sigma(a_1) \sigma(a_2), \sigma(a) \sigma(a_1), E_k(a_2 a)\}.$$

Поскольку $E_k(\varepsilon(a_1 a_2 a)) = \varepsilon(E_k(a_1 a_2 a))$ (лемма 7) и слово $E_k(a_1 a_2 a)$ однозначно определяется по множеству $\varepsilon(E_k(a_1 a_2 a))$ (лемма 8), то либо слово $E_k(a_2 a)$ должно начинаться на букву $\sigma(a_1)$, либо на букву $\sigma(a)$. Так как

$$E_k(a_2 a) \in \{\sigma(a_2) \sigma(a), \sigma(a) \sigma(a_2)\},$$

то $E_k(a_2 a) = \sigma(a) \sigma(a_2)$ и поэтому $E_k(a_1 a_2 a) = \sigma(a) \sigma(a_1) \sigma(a_2)$. Теперь рассмотрим слово $a_1 a a_2 \in A^3$. Так как

$$\varepsilon(a_1 a a_2) = \{a_1 a, a_1 a_2, a a_2\}$$

и $E_k(a a_2) = \sigma(a_2) \sigma(a)$, то

$$E_k(\varepsilon(a_1 a a_2)) = \{\sigma(a) \sigma(a_1), \sigma(a_1) \sigma(a_2), \sigma(a_2) \sigma(a)\}.$$

Но из полученного множества нельзя собрать слово, так как в данном множестве три слова начинаются на три различные буквы, а этого не может быть (лемма 8). Так как должно быть $E_k(\varepsilon(a_1 a a_2)) = \varepsilon(E_k(a_1 a a_2))$, то слова $E_k(a_1 a a_2)$ не существует. Противоречие.

Таким же образом показывается, что $E_k(a a_2) = \sigma(a) \sigma(a_2)$ для любого $a \in A$. Пусть $ab \in A^2$. Тогда $E_k(a_1 b) = \sigma(a_1) \sigma(b)$, а из данного равенства будет следовать равенство $E_k(ab) = \sigma(a) \sigma(b)$.

Совершенно аналогично доказывается, что если найдутся такие $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$, что

$$E_k(a_1 a_2) = \sigma(a_2) \sigma(a_1),$$

то $E_k|_{A^2} = \sigma \circ \mu$.



Таким образом, условие пункта 2 доказано для всех слов из множества $A \cup A^2$. Предположим, что условие пункта 2 верно для всех слов из множества $A \cup \dots \cup A^l$, где $t < l$. Докажем утверждение для случая $t = l$. Пусть для определенности $E_k|_{A \cup \dots \cup A^l} = \sigma$. Зафиксируем $x \in A^l$. Из леммы 7 следует, что

$$E_k(\varepsilon(x)) = \varepsilon(E_k(x)).$$

Исходя из предположения индукции и леммы 7, имеем:

$$E_k(\varepsilon(x)) = \sigma(\varepsilon(x)) = \varepsilon(\sigma(x)).$$

Из полученного равенства $\varepsilon(E_k(x)) = \varepsilon(\sigma(x))$ немедленно вытекает равенство $E_k(x) = \sigma(x)$ (лемма 8).

Если же $E_k|_{A^l} = \sigma \circ \mu$, то

$$\varepsilon(E_k(x)) = E_k(\varepsilon(x)) = (\sigma \circ \mu)(\varepsilon(x)) = \varepsilon((\sigma \circ \mu)(x)).$$

Поэтому $E_k(x) = (\sigma \circ \mu)(x)$. В силу произвольности элемента $x \in A^l$ получаем справедливость утверждения пункта 2. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $X = Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} A^i$. Эндоморфный шифр Σ_A не распространяет искажений типа пропуска знаков тогда и только тогда, когда для любого $k \in K$ либо

$$E_k = \sigma \text{ на всем множестве } X,$$

либо

$$E_k = \sigma \circ \mu \text{ на всем множестве } X,$$

где $\sigma = E_k|_A$ — сужение отображения E_k на множество A .

Шифры, не распространяющие искажений типа вставки знаков

Введем на множестве X бинарное отношение ε следующим образом. Пусть $x, y \in Y$. $x\varepsilon y \Leftrightarrow$ слово x получено из y путем добавления одной буквы.

Как и прежде, определим множество $\varepsilon(x)$ для некоторого $x \in X$ следующим образом:

$$\varepsilon(x) = \{y \in X \mid x\varepsilon y\}.$$

Определение 4. Будем говорить, что шифр Σ_A не распространяет искажений типа вставки знаков, если для любых $x, y \in Y$, любого $k \in K$ и любого натурального n найдется такое число $0 \leq t \leq n$, что из условия $x\varepsilon^n y$ следует $D_k(x)\varepsilon^m D_k(y)$.

Очевидно, что все леммы из предыдущего пункта будут справедливы и для шифров, не распространяющих искажений типа вставки знаков. Поэтому доказательство следующей теоремы аналогично доказательству теоремы 2.

Теорема 3 (Бабаш А.В., Глухов М.М., Шанкин Г.П.). Пусть $X = Y = \bigcup_{i=1}^l A^i$. Эндоморфный шифр Σ_A не распространяет искажений типа вставки знаков тогда и только тогда, когда для любого $k \in K$ выполнены следующие условия:



1. Если $L = 2$, то для любого $x \in X$ либо

$$E_k(x) = \sigma(x),$$

либо

$$E_k(x) = \sigma(\mu(x)),$$

где $\sigma = E_k|_A$ — сужение отображения E_k на множество A ;

2. Если $L > 2$, то либо

$$E_k = \sigma \text{ на всем множестве } X,$$

либо

$$E_k = \sigma \circ \mu \text{ на всем множестве } X,$$

где $\sigma = E_k|_A$ — сужение отображения E_k на множество A .

Следствие 2. Пусть $X = Y = \bigcup_{l=1}^{\infty} A^l$. Эндоморфный шифр Σ_A не распространяет искажений типа вставки знаков тогда и только тогда, когда для любого $k \in K$ либо

$$E_k = \sigma \text{ на всем множестве } X,$$

либо

$$E_k = \sigma \circ \mu \text{ на всем множестве } X,$$

где $\sigma = E_k|_A$ — сужение отображения E_k на множество A .

Из теорем 1, 2, 3 получается такое

Следствие 3. Пусть

$$X = Y = \bigcup_{l=1}^L A^l, L > 2, \quad \text{либо} \quad X = Y = \bigcup_{l=1}^{\infty} A^l.$$

Тогда если шифр Σ_A не распространяет искажений типа пропуска (вставки) знаков, то он также не распространяет искажений типа замены знаков.

Список литературы

1. Алферов А.П., Зубов А.Ю., Кузьмин А.С., Черемушкин А.В. Основы криптографии. – М.: Гелиос АРВ, 2005, 480 с.
2. Бабаш А.В., Глухов М.М., Шанкин Г.П. О преобразованиях множества слов в конечном алфавите, не размножающих искажений // Дискретная математика, 1997. Т. 9. No 3. С. 3–19.
3. Рацеев С.М. Некоторые обобщения теории Шеннона о совершенных шифрах // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. 2015. Т. 8. No 1. С. 111–127.

References

1. Alferov A.P., Zubov A.Yu., Kuz'min A.S., Cheremushkin A.V. Foundations of Cryptography. Moscow, Gelios ARV, 2005. 480 p.
2. Babash A.V., Glukhov M.M., Shankin G.P. On transformations of a set of words in a finite alphabet that do not propagate distortions // Diskr. Mat., 1997. V. 9. No 3. Pp. 3–19.
3. Ratseev S.M. Some generalizations of Shannon's theory of perfect ciphers // Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr., 2015. V. 8. No 1. P. 111–127.